



## **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

### **ANÁLISE MECÂNICA DE MATERIAIS AUXÉTICOS**

Por,

**Sidney da Silva Cintra**

**Brasília, 11 de fevereiro de 2019**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

# PROJETO DE GRADUAÇÃO

## ANÁLISE MECÂNICA DE MATERIAIS AUXÉTICOS

Por,  
**Sidney da Silva Cintra**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque (Orientador) \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes \_\_\_\_\_

Msc. Álvaro Campos Ferreira \_\_\_\_\_

Brasília 11 de fevereiro de 2019

# Agradecimentos

*Agradeço inicialmente à minha família que me amparou durante toda esta caminhada da graduação e sempre me ajudaram nos momentos difíceis.*

*Ao professor Éder Luis que me apresentou o tema abordado neste trabalho e me ajudou durante o semestre quando dúvidas apareciam.*

*Também aos meus colegas de graduação que sempre me ajudaram quando dúvidas apareceram e também deram conselhos para que eu me tornasse no futuro um profissional melhor. Por último a equipe Apuama que me possibilitou aprender na prática os desafios que poderei enfrentar como um engenheiro, além de ter a experiência de aprender a trabalhar em grupo, cumprir prazos e lidar com a pressão de metas.*

*Sidney da Silva Cintra*

# Resumo

O presente trabalho apresenta um modelo numérico para analisar o comportamento mecânico de uma colmeia hexagonal com reentradas, que apresenta coeficiente de Poisson negativo. Foi realizado um estudo sobre os materiais auxéticos - materiais que apresentam coeficiente de Poisson negativo -, como as pesquisas relacionadas a estes materiais estão se desenvolvendo, em seguida um estudo dos diferentes tipos de estruturas que veem sendo propostas para criar estruturas que apresente o comportamento auxético utilizando materiais com coeficiente de Poisson positivos. Então, foi escolhida uma estrutura - modelo hexagonal com reentradas - e criado um modelo numérico que representasse o comportamento mecânico de tal estrutura. O modelo criado apresentou erros em relação ao modelo teórico utilizado como referência, mas foram apresentadas no trabalho melhorias que podem ser realizadas no modelo para atingir resultados melhores.

**Palavras-chaves:** Auxéticos, Elementos de viga, Poisson negativo, Modelo hexagonal com reentradas.

# Abstract

The present work is a numerical model to analyze the mechanical behavior of a recessed hexagonal hive with a negative Poisson's coefficient. This study is the study of the material materials are presented in the study of these materials are the evaluation of this materials are presented in the development of the materials are a structural forms. using materials with Poisson positive coefficient. Then, a hexagonal model structure with recesses was chosen and created a numerical model that represents how to be able to structure. The model presented the errors in relation to the theoretical model used as reference, but forming the results that can be improved in the model for better results.

**Key-words:** Auxetisc, beam elements, negative Poisson, re-entrant cell.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Comportamento de um material com coeficiente de Poisson positivo. FONTE: (LIM, 2014) . . . . .	2
Figura 2 – Comportamento de materiais com coeficiente de Poisson negativo. FONTE: (LIM, 2014) . . . . .	3
Figura 3 – Estruturas de colmeias auxéticas. FONTE: (ALDERSON; ALDER- SON, 2007) . . . . .	4
Figura 4 – Estrutura idealizada de uma espuma auxética. FONTE: (LIM, 2014) .	5
Figura 5 – Estrutura de um polímero cristalino líquido. FONTE: (LIM, 2014) . . .	6
Figura 6 – Modelos idealizados de tecido auxético. FONTE: (LIM, 2014) . . . . .	6
Figura 7 – Modelo hexagonal com reentradas. FONTE: (MASTERS; EVANS, 1996)	9
Figura 8 – Modelo convencional de colmeia hexagonal. FONTE: (ASHBY, 1977) .	10
Figura 9 – Análise de um elemento de comprimento $l$ da colmeia. FONTE: (ASHBY, 1977) . . . . .	10
Figura 10 – À esquerda: modelo intacto. À direita: modelo com nervuras faltantes. FONTE: (SMITH; GRIMA; EVANS, 2000) . . . . .	13
Figura 11 – Relação coeficiente de Poisson por deformação verdadeira. Dados ex- perimentais e analíticos. FONTE: (SMITH; GRIMA; EVANS, 2000) . .	14
Figura 12 – Modelos para representação de espumas auxéticas. a- antes da retirada de nervuras, e b- após a remoção das nervuras. FONTE: (LIM, 2014) .	15
Figura 13 – a- Representação do comportamento do modelo com triângulos rotativos.b- definição dos parâmetros geométricos utilizados para cálculo geomé- trico. FONTE: (GRIMA; EVANS, 2006) . . . . .	15
Figura 14 – Representação de um sólido elástico em equilíbrio. . . . .	17
Figura 15 – Gráfico Tensão $\times$ Deformação. Representação das áreas de energia de deformação complementar $U_{co}$ e energia de deformação $U_o$ . . . . .	18
Figura 16 – Representação da expansão lateral de um modelo de reentradas quando este esta se expandindo e contraindo. FONTE: (LIM, 2014). . . . .	23
Figura 17 – Relação do coeficiente de Poisson de acordo com (CIAMBELLA; SAC- COMANDI, 2014) em função da elongação $\lambda$ para vários valores de $\nu_0$ . FONTE: (CIAMBELLA; SACCOMANDI, 2014) . . . . .	24

Figura 18 – Forças Cortantes, Forças Axiais, Momento Fletores e Momentos Torço- res atuantes em uma viga. FONTE:(FILHO, 2008) . . . . .	26
Figura 19 – Esforços Axiais em uma viga sendo tracionada. FONTE: (FILHO, 2008)	27
Figura 20 – Comparação mola $\times$ viga. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	28
Figura 21 – Esforços Axiais e deslocamentos aplicados nos nós 1 e 2. FONTE: (FI- LHO, 2008) . . . . .	28
Figura 22 – Viga sobre o efeito de um carregamento P. FONTE: (FILHO, 2008) . .	29
Figura 23 – Configuração da viga deformada. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	29
Figura 24 – Viga com fibras separadas e viga uniforme. FONTE: (FILHO, 2008) . .	31
Figura 25 – Forças Cortantes, Forças Axiais, Momento Fletores e Momentos Torço- res atuantes em uma viga. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	32
Figura 26 – Graus de liberdade do elemento de viga com rigidez a flexão. (a) Des- locamento unitário do G.L. 1, (b) Deslocamento unitário do G.L. 2, (c) Deslocamento unitário do G.L. 3, (d) Deslocamento unitário do G.L. 4. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	33
Figura 27 – Relação entre deslocamentos imposto nas extremidades da viga, e con- sequentes esforços nos nós. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	34
Figura 28 – Representação de um Pórtico Plano. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	35
Figura 29 – Elemento de Viga com Rigidez Axial e a Flexão. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	35
Figura 30 – Elemento de Viga com Rigidez Axial e a Flexão. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	37
Figura 31 – Numeração dos graus de liberdade. FONTE: (FILHO, 2008) . . . . .	38
Figura 32 – Representação de um domínio discretizado. . . . .	40
Figura 33 – Tipos de elementos utilizados em uma discretização em elementos finitos.	41
Figura 34 – Principais dimensões da chapa. FONTE: (TAYLOR et al., 2014) . . . .	42
Figura 35 – Comparação entre os resultados experimentais e uma modelagem nu- mérica representando o modelo de triângulos rotativos. FONTE:(LIM, 2014) . . . . .	42
Figura 36 – Geometria de uma colmeia tetra-aquiral. FONTE: (LIM, 2014) . . . .	43
Figura 37 – (a) Modelo em elementos finitos, e (b) setup para os testes experimen- tais. FONTE: (LIM, 2014). . . . .	44
Figura 38 – Comparação entre os dados experimentais e numéricos do modelo tetra- aquiral. FONTE: (LIM, 2014). . . . .	45
Figura 39 – Modelo de um tecido que apresenta comportamento auxético. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013). . . . .	45
Figura 40 – Geometria em 2D da estrutura em compressão. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013). . . . .	46
Figura 41 – Modelo em elementos finitos do problema. FONTE:(GE; HU; LIU, 2013).	46

Figura 42 – Relação do coeficiente de Poisson com a deformação em compressão para os dados analíticos, experimentais e numéricos. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013). . . . .	46
Figura 43 – Superior: Vista isométrica da geometria de uma das colmeias analisadas. Inferior: Vista frontal da colmeia e identificação das variáveis analisadas. . . . .	49
Figura 44 – Idealização por elementos de viga utilizada para representação da geometria no software ANSYS. . . . .	51
Figura 45 – Vista da malha utilizada durante a simulação. . . . .	52
Figura 46 – Gráfico convergência de malha. . . . .	53
Figura 47 – Condições de contorno adotada na simulação. . . . .	54
Figura 48 – Demonstração dos deslocamentos direcionais. . . . .	55
Figura 49 – Campo de deslocamento direcional $X$ obtido na simulação da colmeia 1.	56
Figura 50 – Gráfico relacionando ângulo $\theta \times \nu_{teorico}$ e $\theta \times \nu_{numerico}$ para colmeia 1. .	57
Figura 51 – Campo de deslocamento direcional $X$ obtido na simulação da colmeia 2.	57
Figura 52 – Gráfico relacionando ângulo $\theta \times \nu_{teorico}$ e $\theta \times \nu_{numerico}$ para colmeia 2. .	58
Figura 53 – Campo de deslocamento direcional $X$ obtido na simulação da colmeia 2.	59
Figura 54 – Gráfico relacionando ângulo $\theta \times \nu_{teorico}$ e $\theta \times \nu_{numerico}$ para colmeia 3. .	60
Figura 55 – Gráfico relacionando ângulo $\theta \times \nu_{teorico}$ e $\theta \times \nu_{numerico}$ para colmeia 4. .	61
Figura 56 – Gráfico relacionando $l \times \nu_{teorico}$ e $l \times \nu_{numerico}$ . . . . .	62
Figura 57 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 1 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	68
Figura 58 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 1 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	68
Figura 59 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 1 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	69
Figura 60 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 1 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	69
Figura 61 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 1 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	69
Figura 62 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 1 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	70
Figura 63 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 1 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	70
Figura 64 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 1 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	70
Figura 65 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 1 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	71
Figura 66 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 1 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	71
Figura 67 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 2 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	72
Figura 68 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	72
Figura 69 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 2 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	73
Figura 70 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	73
Figura 71 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	73
Figura 72 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	74
Figura 73 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	74
Figura 74 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	74
Figura 75 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	75
Figura 76 – Campo deslocamento na direção $Y$ Colmeia 2 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	75
Figura 77 – Campo deslocamento na direção $X$ Colmeia 3 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	76



Figura 78 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	76
Figura 79 – Campo deslocamento na direção X Colmeia 3 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	77
Figura 80 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	77
Figura 81 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	77
Figura 82 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	78
Figura 83 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	78
Figura 84 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	78
Figura 85 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	79
Figura 86 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e $\theta = -30^\circ$ . . . . .	79
Figura 87 – Campo deslocamento na direção X Colmeia 4 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	80
Figura 88 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -10^\circ$ . . . . .	80
Figura 89 – Campo deslocamento na direção X Colmeia 4 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	81
Figura 90 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -15^\circ$ . . . . .	81
Figura 91 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	81
Figura 92 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -20^\circ$ . . . . .	82
Figura 93 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	82
Figura 94 – Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e $\theta = -25^\circ$ . . . . .	82

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Valores de $l, h$ e $\theta$ utilizados nas simulações. . . . .	50
Tabela 2 – Propriedades mecânicas da liga de alumínio. . . . .	50
Tabela 3 – Resultados colmeia 1 . . . . .	56
Tabela 4 – Resultados obtidos na simulação da colmeia 2. . . . .	58
Tabela 5 – Resultados Colmeia 3. . . . .	59
Tabela 6 – Resultados colmeia 4. . . . .	60

# Lista de abreviaturas e siglas

# Lista de símbolos

## Símbolos Latinos

$G$	Módulo de Cisalhamento	$[Pa]$
$E$	Módulo de Elasticidade	$[Pa]$
$I$	Momento de Inercia	$[kg.m^2]$
$p$	Pressão	$[Pa]$
$C$	Matriz Rigidez	$[Pa^{-1}]$
$S$	Matriz Flexibilidade	$[Pa^{-1}]$
$F$	Força	$[N]$
$A$	Área	$[m^2]$
$d( )$	Diferencial de uma propriedade	

## Símbolos Gregos

$\sigma$	Tensão	$[Pa]$
$\rho$	Massa específica	$[kg/m^3]$
$\tau$	Tensão de Cisalhamento	$[Pa]$

## Símbolos Adimensionais

$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\varepsilon$	Deformação

## Sobrescritos

$e$	Enésimo elemento
$'$	Primeira derivada
$''$	Segunda derivada

## Subscritos

0	Condição inicial
12	Propriedade na direção $xy$

# Sumário

	<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>ESTADO DA ARTE . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>OBJETIVOS . . . . .</b>	<b>6</b>
1.3.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	7
	<b>2 MATERIAIS AUXÉTICOS . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2.1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2.2</b>	<b>MODELOS MICROESTRUTURAIS . . . . .</b>	<b>9</b>
2.2.1	MODELO HEXAGONAL COM REENTRADAS . . . . .	9
2.2.2	MODELO COM NERVURAS FALTANTES . . . . .	11
2.2.3	OUTROS MODELOS . . . . .	14
	<b>3 ELASTICIDADE DE SÓLIDOS AUXÉTICOS . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>3.1</b>	<b>RELAÇÃO CONSTITUTIVA . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>3.2</b>	<b>LIMITES PARA O COEFICIENTE DE POISSON . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>3.3</b>	<b>GRANDES DEFORMAÇÕES PARA MATERIAIS AUXÉTICOS . . .</b>	<b>22</b>
	<b>4 ELEMENTOS DE VIGA EULER-BERNOULLI . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>4.1</b>	<b>COMPORTAMENTO DE VIGAS SOBRE TENSÕES AXIAIS . . . .</b>	<b>26</b>
4.1.1	MATRIZ RIGIDEZ . . . . .	28
<b>4.2</b>	<b>COMPORTAMENTO DE VIGAS À FLEXÃO . . . . .</b>	<b>29</b>
4.2.1	TENSÕES NORMAIS . . . . .	29
4.2.2	TENSÕES DE CISALHAMENTO . . . . .	31
<b>4.3</b>	<b>MATRIZ DE RIGIDEZ . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.4</b>	<b>PÓRTICO PLANO . . . . .</b>	<b>34</b>
4.4.1	MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO . . . . .	36
<b>4.5</b>	<b>MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA . . . . .</b>	<b>38</b>
	<b>5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>5.1</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS EM MATERIAIS AUXÉTICOS . . . . .</b>	<b>41</b>

<b>6</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA</b>	<b>47</b>
<b>6.1</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>48</b>
6.1.1	DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA	49
6.1.2	DEFINIÇÃO DA SIMULAÇÃO	50
6.1.3	MALHA	52
6.1.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO	53
6.1.5	SOLUÇÃO	53
<b>6.2</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>54</b>
6.2.1	COLMEIA 1	55
6.2.2	COLMEIA 2	56
6.2.3	COLMEIA 3	58
6.2.4	COLMEIA 4	59
6.2.5	ANÁLISE GERAL	60
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO E SUGESTÕES</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE A – APÊNDICE A - SIMULAÇÃO COLMEIA 1</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE B – APÊNDICE B - SIMULAÇÃO COLMEIA 2</b>	<b>72</b>
	<b>APÊNDICE C – APÊNDICE C - SIMULAÇÃO COLMEIA 3</b>	<b>76</b>
	<b>APÊNDICE D – APÊNDICE D - SIMULAÇÃO COLMEIA 4</b>	<b>80</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Materiais são tão importantes para humanidade que servem para dividir os diferentes períodos históricos; a idade da pedra com o surgimento das ferramentas, a era do metal com as revoluções industriais, a era do silício com os desenvolvimento dos aparelhos eletrônicos são alguns exemplos que mostram como o descobrimento e desenvolvimento de novos materiais é essencial para a evolução da humanidade.

Percebe-se que os investimentos feito nesta área aumenta a cada dia, possibilitando a criação de materiais que podem aumentar a eficiência de sistemas que já são utilizados, como também podem possibilitar a criação de novas tecnologias que nunca imaginávamos ser capaz de existir.

Como exemplo podemos citar as ligas metálicas que buscam aumentar a propriedade de um material, combinando o mesmo com outros materiais. Com isso é possível aumentar a eficiência dos sistemas que utilizam estes materiais. Também existem metais que são combinados com cerâmicas, aliando a boa resistência mecânica dos metais com a boa resistência térmica das cerâmicas, tornando este material ótimo para aplicações que chegam a temperaturas elevadíssimas.

Os tecidos também são utilizadas para fabricação dos materiais compósitos que apresentam alta resistência em certas direções, combinado com um baixo peso específico e são muito utilizados na indústria aeronáutica.

Os biomateriais são empregados no corpo humano como uma medida de melhora ou reposição de alguma função corporal. Eles devem apresentar baixa reatividade com o organismo humano. Devem ser resistentes e altamente confiáveis. Um exemplo é a utilização de polímeros em substituição a dentes, e até os metais que são utilizados em cirurgias reconstrutivas.

O estudo destes e outros materiais estão dentro de uma área da engenharia chamada ciência dos materiais. Esta área estuda as estruturas internas dos materiais, suas ligações internas e a composição química, com o objetivo de criar uma teoria que relacione o comportamento desta estrutura interna com suas propriedades e comportamentos. Assim é possível utilizar estes materiais para melhorar e criar sistemas eficientes.



## 1.2 ESTADO DA ARTE

O coeficiente de Poisson é uma relação entre a deformação transversal ao sentido da força aplicada com a deformação sentida na direção normal à força aplicada. Na Figura 1 pode se observar está relação de deformações e também observamos na forma da Equação 1.1.

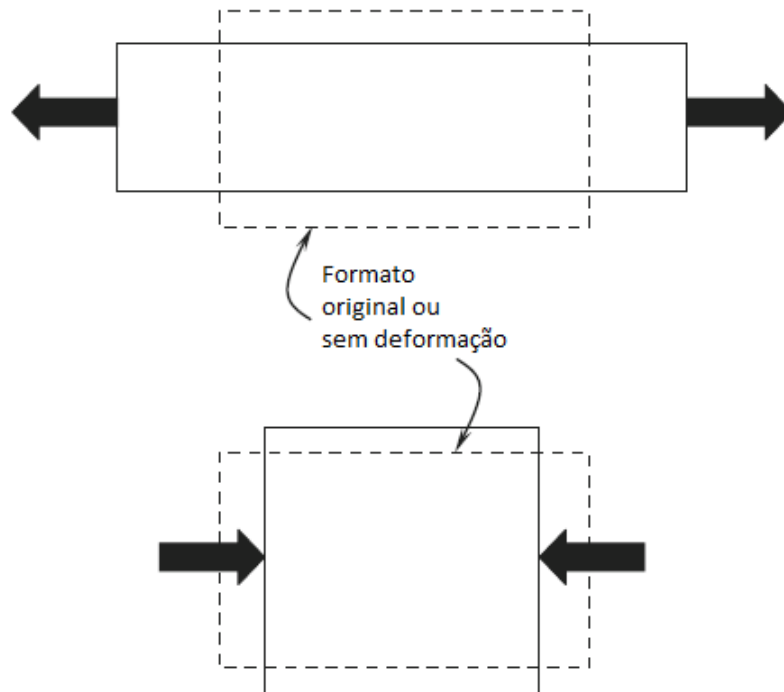


Figura 1: Comportamento de um material com coeficiente de Poisson positivo. FONTE: (LIM, 2014)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}}. \quad (1.1)$$

A deformação longitudinal é uma expansão enquanto a deformação transversal é uma contração. Então para obter valores positivos foi adicionado o sinal negativo a equação.

O primeiro estudo onde se viu este comportamento de deformação longitudinal e transversal dos materiais foi o de Young (1807). Então outros estudos foram desenvolvidos, Poisson (1827) conseguiu achar um coeficiente de  $\frac{1}{4}$  baseado na teoria da interação molecular e a partir daí outros trabalhos foram desenvolvidos até se chegar a Cauchy (1827) que mostrou que para se caracterizar um material isotrópico é necessário dois módulos de elasticidade independentes. Sendo assim, o coeficiente de Poisson difere para diferentes materiais.

O coeficiente de Poisson não precisa ser necessariamente positivo. Existem casos de materiais que apresentam este coeficiente negativo, ou seja, eles tendem a se expandir

na direção transversal ao carregamento quando é aplicada uma deformação positiva. Na Figura 2 podemos observar este comportamento.

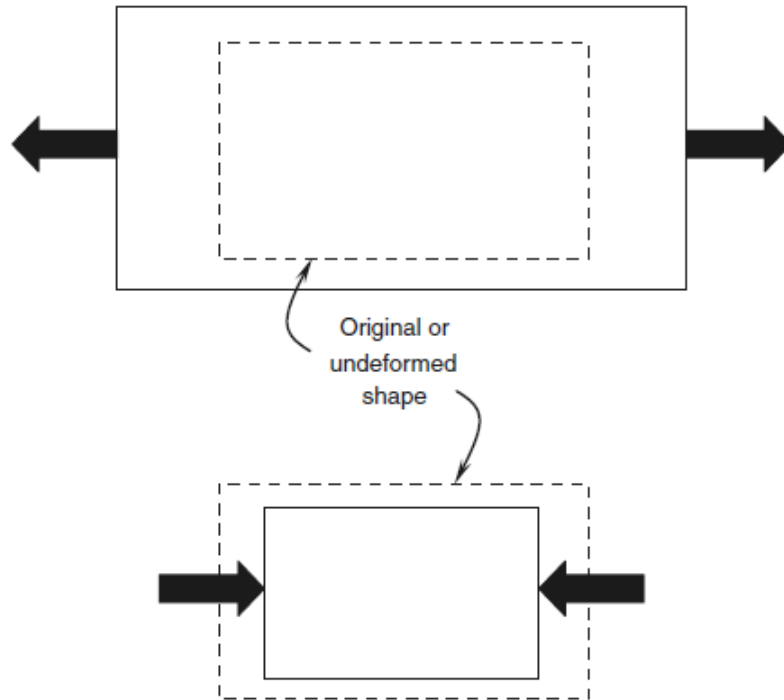


Figura 2: Comportamento de materiais com coeficiente de Poisson negativo. FONTE: (LIM, 2014)

Os materiais que apresentam estes tipos de comportamento foram denominados materiais auxéticos, pois auxéticos é uma palavra que derivada da palavra ‘auxetikos’ do grego que significa o que tende a expandir. Analisando as equações de Cauchy, Saint-Venant (1848) foi o primeiro a propor que era possível existir coeficiente de Poisson negativo para materiais sólidos anisotrópicos. Então, por volta de 1980 o estudo relacionado aos materiais auxéticos foram retomados com força. Foram realizados estudos experimentais e estudos através de simulações computacionais. Foram analisados  $\alpha$  quartzo, estruturas de colmeia com reentradas, estruturas isotrópicas 3D ligadas por hastes, estruturas hexagonais 2D formando treliças, etc.

Atualmente, as pesquisas realizadas sobre este tipo de material cresce a cada dia. E esses materiais apresentam novas características que permitem a solução ou a simplificação de vários problemas de engenharia. Sabemos que muitas propriedades de materiais depende de seu coeficiente de Poisson. Um expemplo vem da teoria da elasticidade que relaciona o Poisson com o módulo de cisalhamento como podemos observar na equação 1.2.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.2)$$

Podemos observar que quanto  $\nu$  se aproxima de -1, o módulo de cisalhamento tende ao infinito. E isto não ocorre somente com o módulo de cisalhamento, propriedades como resistência à indentação, resistência a fratura e resistência térmica, também apresentam este comportamento.

Materiais auxéticos são considerados uma nova classe de materiais, já que os estudos sobre este tipo de materiais são recentes. Materiais que apresentam comportamento auxéticos podem ser encontrados na natureza ou podem ser desenvolvidos pelo homem. Exemplos de materiais encontrados na natureza são, cristais simples de arsênio, piratas de ferros, metais cúbicos elementais, peles de animais, etc. Apesar disso, a primeira pesquisa envolvendo esse tipo de estrutura foi através do estudo de uma espuma de poliuretano e, a partir desse ponto iniciaram-se as pesquisas envolvendo materiais artificiais.

Dentre estes materiais desenvolvidos pelo próprio homem para apresentar comportamento auxéticos, os principais são: os sólidos celulares, os polímeros e as fibras. Exemplos de sólidos celulares são as colmeias e as espumas. A estrutura mais básica de colmeia que apresenta coeficiente de Poisson negativo são as colmeias hexagonais com reentradas. Neste trabalho será feita uma análise detalhada desta estrutura, mas na figura 3 podemos ver outros tipos de colmeias que apresentam o comportamento auxético. Este tipo de estrutura apresenta uma facilidade para formar domos e podem ser combinados com outros materiais para se obter propriedades certas de acordo com a aplicação. Porém, muitas vezes, algumas colmeias apresentam certa dificuldade de serem fabricadas.

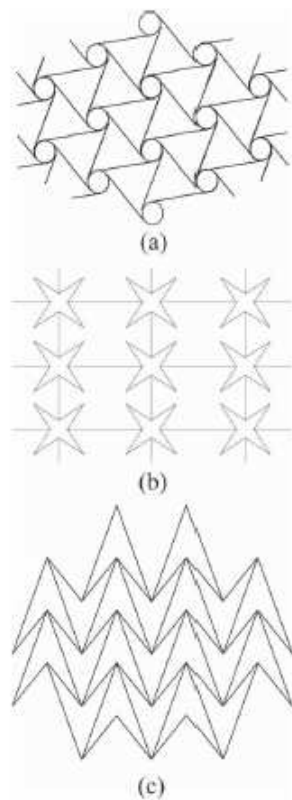


Figura 3: Estruturas de colmeias auxéticas. FONTE: (ALDERSON; ALDERSON, 2007)

Outro tipo de material celular são as espumas. Elas não possuem propriedades auxéticas naturalmente. É necessário fazer uma modificação na sua estrutura para que este apresente tais propriedades. Lakes (1987) propôs um modelo para conseguir fazer com que as espumas apresentem propriedades auxéticas. Uma estrutura idealizada de tal modelo pode ser vista na Figura 4. Nesse modelo ele propõe que as espumas sejam comprimidas nas 3 dimensões e colocadas em um molde que será aquecido a uma temperatura inferior ao ponto de transição vítrea e depois resfriadas novamente à temperatura ambiente para depois serem removidas do molde. Assim, as espumas passam a apresentar propriedades auxéticas. Essa não é a única forma encontrada na literatura para se conseguir produzir espumas com propriedades auxéticas, conforme mostrado por Pickles et al. (1995), Chan e Evans (1997), que também propuseram meios para fabricação de espumas que apresentem coeficiente de Poisson negativo. Outra maneira interessante de se conseguir produzir espumas que apresentam tais propriedades é a impressão 3D. Critchley et al. (2013) conseguiu produzir uma espuma utilizando esta técnica e conseguiu chegar a um coeficiente de Poisson de -1,18 quando tal estrutura está carregada sob tração.

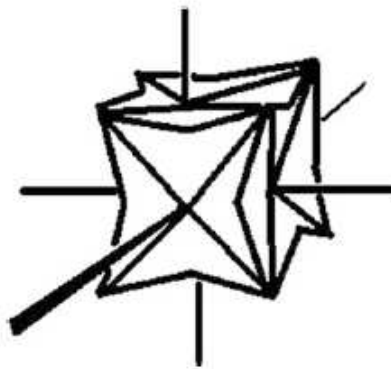


Figura 4: Estrutura idealizada de uma espuma auxética. FONTE: (LIM, 2014)

Existem estudos que mostram que também é possível a criação de polímeros que apresente coeficiente de Poisson negativo. He, Liu e Griffin (1998) idealizaram uma estrutura polimérica que seria capaz de apresentar comportamento auxéticos como pode ser visto na Figura 5. Estudos mostram que este tipo de estrutura pode apresentar um coeficiente de Poisson muito negativo porque apresenta elevada resistência a indentação, baixa densidade. Mas geralmente as propriedades mecânicas são muito baixas o que dificulta a sua aplicação.

Outros tipos de estruturas artificiais que apresentam o comportamento auxético são os fios e tecidos. Uma maneira de se conseguir um coeficiente de Poisson negativo nesse tipo de material é enrolando um fio de pequeno diâmetro que seja inextensível em um fio de diâmetro maior que seja elástico. Este arranjo permitirá que, quando tracionado, o fio elástico produzirá um efeito helicoidal no fio elástico que aumentará seu tamanho na seção transversal ao carregamento. Na Figura 6 podemos ver uma representação desse

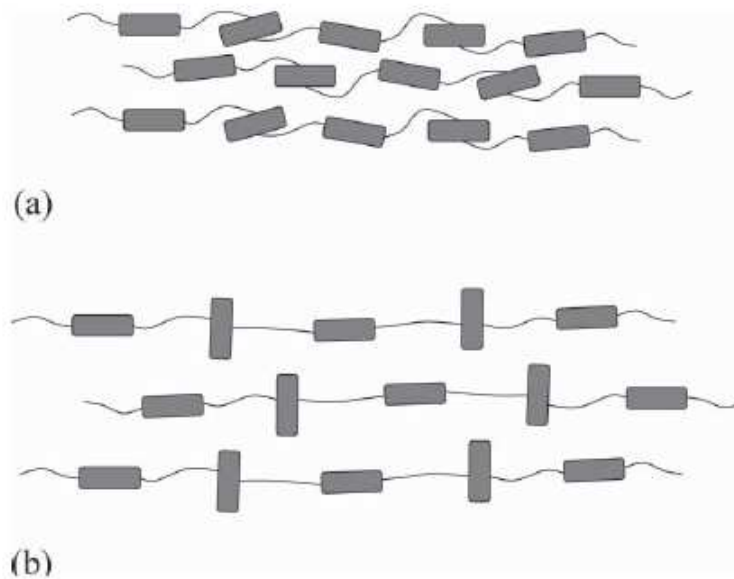


Figura 5: Estrutura de um polímero cristalino líquido. FONTE: (LIM, 2014)

modelo. Estudos mostram que materiais compósitos feitos com tecidos que apresentam comportamento auxético, podem melhorar a resistência a fratura do laminado, uma vez que as fibras não tenderiam a descolar da matriz.

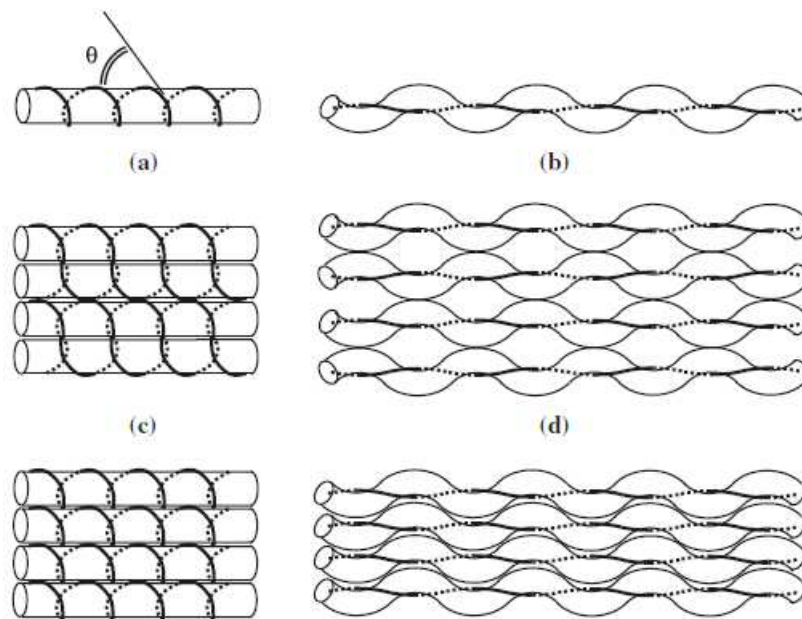


Figura 6: Modelos idealizados de tecido auxético. FONTE: (LIM, 2014)

### 1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo do comportamento dos materiais auxéticos. Será realizado um estudo bibliográfico deste tipo de materiais visando

entender como as pesquisas em relação a este tipo de materiais está se desenvolvendo. Outro objetivo deste estudo é propor um modelo numérico que descreve o comportamento de uma estrutura que apresente o coeficiente de Poisson negativo.

### 1.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudo teórico dos materiais auxéticos;
- Estudo da teoria dos elementos finitos;
- Estudo da teoria de vigas;
- Criação de um modelo numérico para descrever o modelo hexagonal com reentradas, utilizando um software de elementos finitos;
- Comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos proposto inicialmente pelo modelo hexagonal com reentradas de Masters e Evans (1996).

## 2 MATERIAIS AUXÉTICOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Se olharmos em qualquer livro de ciência dos materiais, podemos notar que o coeficiente de Poisson é uma variável determinante para caracterizarmos a propriedade de um material. A descoberta de materiais que possuem o coeficiente de Poisson negativo abriu uma gama de novas possibilidades que antes não seriam facilmente conseguidas com os materiais comuns, aqueles com coeficiente de Poisson positivo.

Por exemplo, quando consideramos um material auxético isotrópico, sabendo qual é seu coeficiente de Poisson, podemos facilmente determinar outras importantes propriedades como o módulo de Elasticidade e módulo de cisalhamento. Verifica-se que quando o Poisson é negativo, o material fica mais resistente ao cisalhamento. Deste modo, ele mantém a sua forma, mas continua com sua capacidade de comprimir, ou seja, muda de volume facilmente. Estudos mostram que materiais auxéticos podem apresentar diversos tipos de propriedades como, por exemplo:

- Resistência à endentação melhorada;
- Melhor resistência à fratura;
- Uma tendência natural a produzir superfícies curvas;
- Melhor absorção de energia.

Podem existir ainda diversas outras melhoras nas propriedades que podem ser descobertas. A chave para isso é entender a relação do coeficiente de Poisson e a propriedade que se deseja para dada aplicação.

Essa gama de melhoras podem ser aplicados a diversos ramos. Eles podem ser utilizados na indústria de esportes, para fabricação de produtos que tenham boa resistência ao impacto, assim como uniformes que sejam confortáveis e que se modelem melhor ao corpo humano. Outras áreas que têm bastante interesse no desenvolvimento de materiais com o coeficiente de Poisson negativo é a indústria automotiva e aeronáutica. Nestas áreas vemos a aplicação desse tipo de material em sistemas de amortecimento, utilização para

a construção de sistemas curvos (por exemplo radome de avião), estruturas que mudam o formato, em materiais compósitos para melhorar a resistência a fadiga.

## 2.2 MODELOS MICROESTRUTURAIS

Para explicar e prever o comportamento destes materiais com coeficiente de Poisson negativo, foram criados modelos que tentam explicar como são as microestruturas destes materiais, o objetivo dessa parte do trabalho é mostrar alguns destes modelos que foram desenvolvidos.

### 2.2.1 MODELO HEXAGONAL COM REENTRADAS

O primeiro modelo é o modelo microestrutural de células abertas com reentradas. Esse modelo se baseia na estrutura hexagonal das colmeias, mas com as pontas do hexágono voltadas para dentro. Na Figura 7 podemos observar uma representação deste modelo

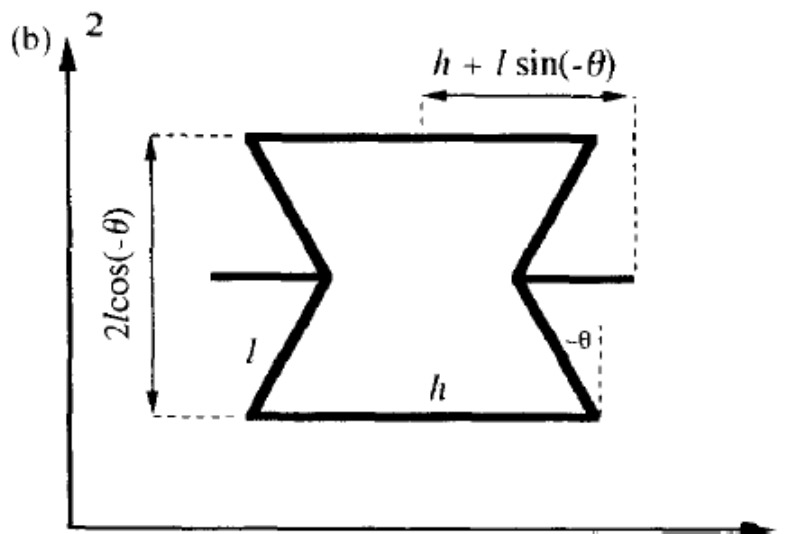


Figura 7: Modelo hexagonal com reentradas. FONTE: (MASTERS; EVANS, 1996)

O modelo com reentradas foi proposto por Masters e Evans (1996) e eles utilizaram as equações de Ashby (1977) que já tinha estudado as colmeias hexagonais convencionais e utilizaram para calcular qual seria o coeficiente de Poisson o módulo de Young para este tipo de estrutura. Masters e Evans (1996) perceberam que ao utilizar estas equações com um  $\theta < 0^\circ$ , o coeficiente de Poisson ficava negativo, caracterizando um material auxético.

A seguir podemos ver a metodologia utilizada por Ashby (1977) para o cálculo do coeficiente de Poisson e do módulo de Young.



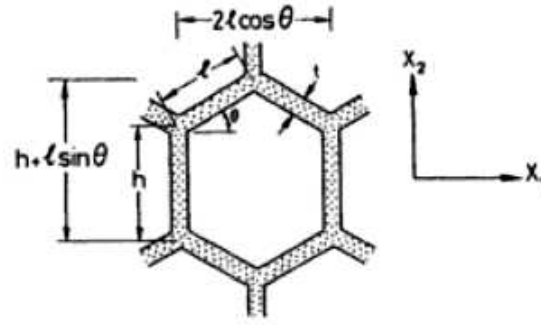


Figura 8: Modelo convencional de colmeia hexagonal. FONTE: (ASHBY, 1977)

Na Figura 8 podemos observar o modelo hexagonal convencional juntamente com as variáveis  $h$ ,  $l$ ,  $\theta$  e  $t$  que definem o problema. Para analisar esta estrutura com um carregamento na direção  $X_2$ , pega-se um pequeno segmento de tamanho  $l$  e analisa os esforços internos que atuam sobre ele. Na Figura 9 é apresentado este segmento.

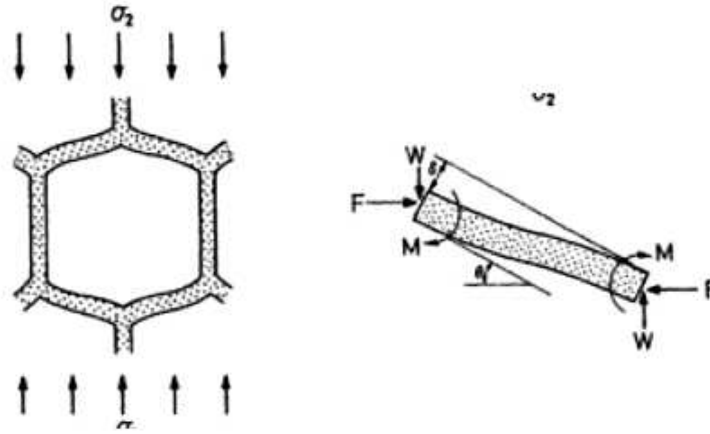


Figura 9: Análise de um elemento de comprimento  $l$  da colmeia. FONTE: (ASHBY, 1977)

Por equilíbrio, sabe-se que  $F = 0$  e  $W$  é dado pela seguinte equação:

$$W = \sigma_2 l b \cos \theta, \quad (2.1)$$

onde  $b$  é o comprimento na direção  $X_3$ .

A componente de momento é dada por:

$$M = \frac{W l \cos \theta}{2}. \quad (2.2)$$

Utilizando a teoria de viga, podemos dizer que a deflexão pode ser calculada por:

$$\delta = \frac{W l^3 \cos \theta}{12 E_s I}, \quad (2.3)$$

onde,  $E_s$  é o módulo de Young do material da colmeia e  $I$  é o segundo momento de inércia. O momento de inércia é dado por:

$$I = \frac{bt^3}{12}. \quad (2.4)$$

Após calcular a deflexão, podemos calcular a deflexão sofrida nas direções 1 e 2. Sendo que:

$$\epsilon_1 = \frac{\delta \sin \theta}{l \cos \theta}; \quad (2.5)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\delta \cos \theta}{h + l \sin \theta}. \quad (2.6)$$

Agora podemos calcular o módulo de Young ( $E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ ), e o coeficiente de Poisson ( $\nu_{21} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$ ). Substituindo as equações (2.4), (2.6) e (2.7) chegamos em:

$$E_2 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{h/l + \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}; \quad (2.7)$$

$$\nu_{21} = \frac{(h/l + \sin(\theta)) \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}. \quad (2.8)$$

Assim chegamos a uma equação para o coeficiente de Poisson quando a colmeia hexagonal é igual a apresentada na Figura 7. Para valores de  $\theta$  negativo conseguimos chegar ao modelo de estrutura com reentradas, e pode-se utilizar a equação acima descrita para se calcular o coeficiente de Poisson com  $\theta < 0^\circ$ .

## 2.2.2 MODELO COM NERVURAS FALTANTES

Outro modelo, é o modelo de nervuras faltantes apresentado por Smith, Grima e Evans (2000). Este modelo tenta prever o comportamento de espumas auxéticas e ele pode ser observado na Figura 10. A seguir é apresentada a estratégia utilizada para se encontrar o coeficiente de Poisson deste modelo. Primeiramente, analisando o modelo da esquerda apresentado na Figura 10, Smith, Grima e Evans (2000) mostraram que as dimensões das células para um ângulo dado por  $0 < \zeta < \pi$  é:

$$X_1 = 2a \cos \left( \frac{\zeta}{2} \right); \quad (2.9)$$

$$X_2 = 2a \sin \left( \frac{\zeta}{2} \right). \quad (2.10)$$

O coeficiente de Poisson pode ser escrito como:

$$\nu_{21} = (\nu_{12})^{-1} = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}, \quad (2.11)$$

onde  $d\varepsilon_i$  é um pequeno incremento de deformação na direção  $i$ , que pode ser expresso como:

$$d\varepsilon_i = \frac{dX_i}{X_i} = \frac{1}{X_i} \frac{dX_i}{d\zeta} d\zeta. \quad (2.12)$$

Logo,

$$\nu_{21} = (\nu_{12})^{-1} = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = -\left[ \frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{d\zeta} d\zeta \right] \left[ \frac{1}{X_2} \frac{dX_2}{d\zeta} d\zeta \right]^{-1} = -\frac{X_2}{X_1} \frac{dX_1}{d\zeta} \left( \frac{dX_2}{d\zeta} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

Sendo,

$$\frac{dX_1}{d\zeta} = -a \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right); \quad (2.14)$$

$$\frac{dX_2}{d\zeta} = a \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right). \quad (2.15)$$

Portanto,

$$\nu_{21} = (\nu_{12})^{-1} = \frac{2a \sin(\zeta/2)}{2a \cos(\zeta/2)} \left[ -a \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \left[ a \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right]^{-1} = \tan^2\left(\frac{\zeta}{2}\right). \quad (2.16)$$

Para o caso da direita em que há nervuras faltando, Smith, Grima e Evans (2000) desenvolveram o seguinte raciocínio. Primeiramente eles propuseram que as juntas que formam um ângulo  $\theta$  são molas, sendo que  $k_\zeta \gg k_\theta$ . Logo, um carregamento na direção  $i$  qualquer, provocará mudanças apenas nos ângulos de  $\theta$ . Sabendo isso, podemos definir  $X_1$  e  $X_2$  em função da variável  $\phi$  da seguinte forma:

$$X_1 = 4a \cos(\zeta - \phi); \quad (2.17)$$

$$X_2 = 4a \sin(\phi). \quad (2.18)$$

Para o cálculo do coeficiente de Poisson, segue-se a mesma lógica seguida para o caso da versão anterior onde,

$$\nu_{21} = (\nu_{12})^{-1} = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}; \quad (2.19)$$

$$-\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = - \left[ \frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{d\phi} d\phi \right] \left[ \frac{1}{X_2} \frac{dX_2}{d\phi} d\phi \right] = - \frac{X_2}{X_1} \frac{dX_1}{d\phi} \left[ \frac{dX_2}{d\phi} \right]^{-1}. \quad (2.20)$$

Sendo que:

$$\frac{dX_1}{d\phi} = 4a \sin(\zeta - \phi); \quad (2.21)$$

$$\frac{dX_2}{d\phi} = 4a \cos(\phi). \quad (2.22)$$

Então,

$$\nu_{21} = (\nu_{12})^{-1} = - \frac{4a \sin(\phi)}{4a \cos(\zeta - \phi)} 4a \sin(\zeta - \phi) [4a \cos(\phi)]^{-1} = -\tan(\phi) \tan(\zeta - \phi). \quad (2.23)$$

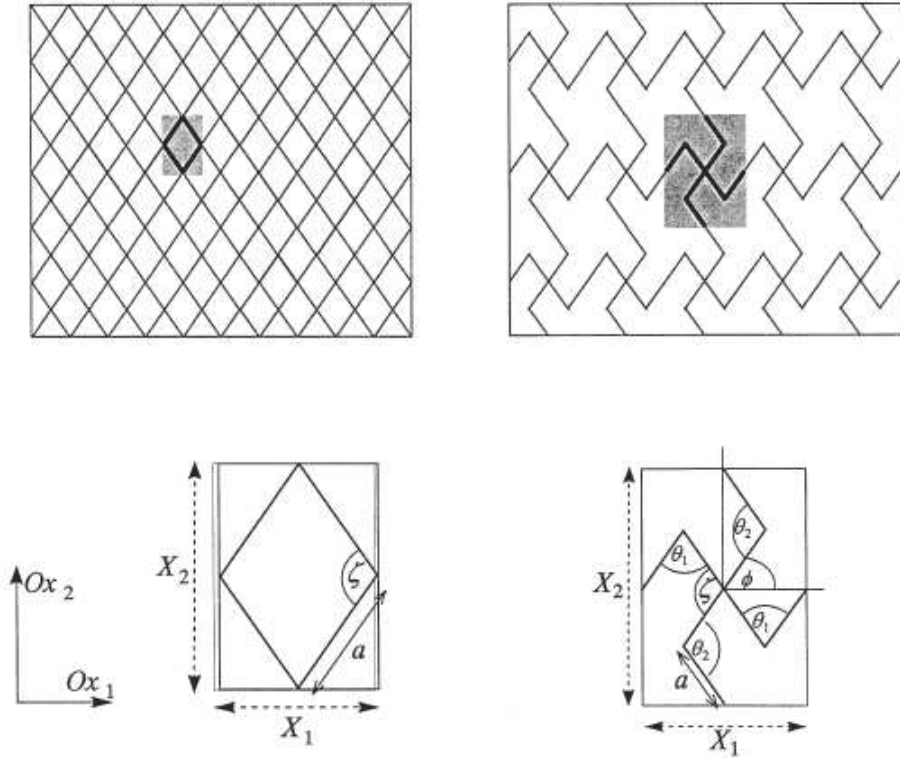


Figura 10: À esquerda: modelo intacto. À direita: modelo com nervuras faltantes. FONTE: (SMITH; GRIMA; EVANS, 2000)

No trabalho de Smith, Grima e Evans (2000) existe uma comparação entre o modelo hexagonal com reentradas, o modelo por eles propostos (tanto o modelo completo, quanto o modelo com nervuras faltantes) e dados retirados de experimentos. Primeiramente eles fizeram uma comparação entre o coeficiente de Poisson e a deformação verdadeira destes materiais como pode ser visto na figura 11. Percebe-se que, para valores positivos de coeficientes de Poisson, o modelo de nervuras faltantes se aproxima bastantes

do valores experimentais para qualquer valor de deformação, enquanto o modelo hexagonal se distancia dos valores experimentais a medida que a deformação aumenta. Já para valores negativos de Poisson, podemos observar novamente que o modelo de nervuras faltantes se aproxima dos dados experimentais enquanto o modelo hexagonal se difere muito.

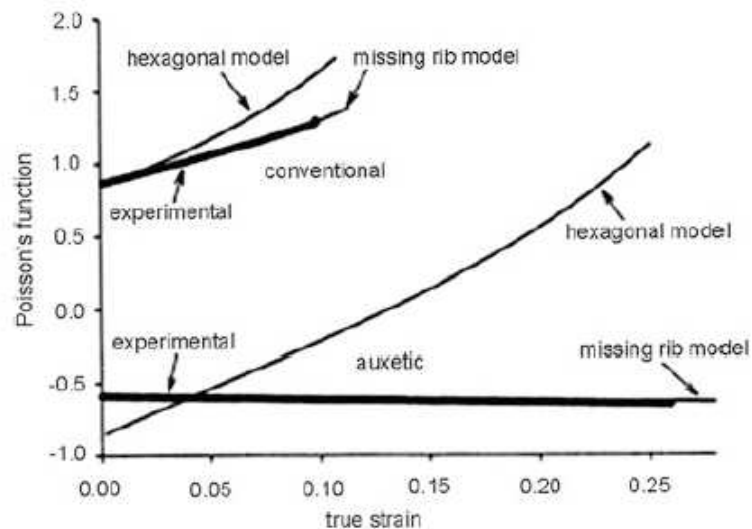


Figura 11: Relação coeficiente de Poisson por deformação verdadeira. Dados experimentais e analíticos. FONTE: (SMITH; GRIMA; EVANS, 2000)

É importante salientar que as comparações foram feitas com valores constante de  $\theta$ , tanto para valores positivos como para valores negativos.

### 2.2.3 OUTROS MODELOS

Outros modelos semelhantes a estes foram apresentados, um deles é o modelo de LIM (2014). Estes autores resolveram estudar a microestrutura de espumas auxéticas e convencionais através de um fotomicroscópio. Analisando as microestruturas auxéticas e convencionais foi mostrado que o modelo de reentradas não era parecido com as estruturas visualizadas em microscópio. As espumas convencionais mostravam uma certa regularidade, pois as células apresentavam tamanhos iguais, mas as espumas auxéticas apresentam um alto grau de irregularidade.

Baseado nas observações microscópicas das estruturas destes materiais, LIM (2014) propôs um modelo para descrever o comportamento de tais espumas. Na Figura 12 podemos observar o esquema proposto por ele. A esquerda temos uma representação do modelo que simula a microestrutura de um material convencional e a direita uma representação de um material auxético.

Esse modelo é bastante semelhante ao modelo de nervuras faltantes proposto por Smith, Grima e Evans (2000). Podemos observar pela Figura 12 que estas células são

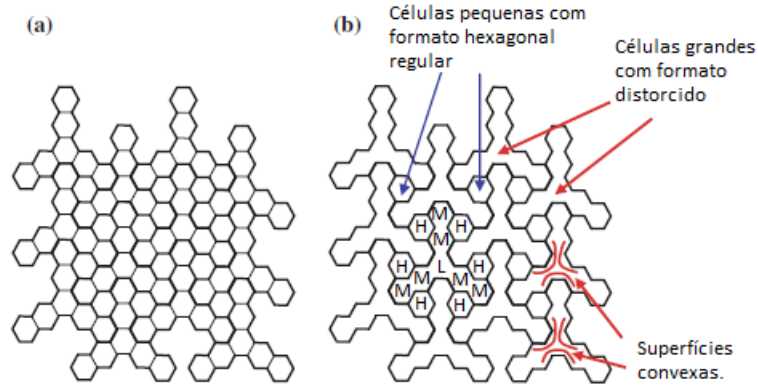


Figura 12: Modelos para representação de espumas auxéticas. a- antes da retirada de nervuras, e b- após a remoção das nervuras. FONTE: (LIM, 2014)

bastantes organizadas e que existe uma célula padrão. Em cada célula padrão existe 3 tipos diferentes de regiões, sendo elas: de alta rigidez (indicada pela letra  $H$ ), média rigidez (indicada pela letra  $M$ ), e baixa rigidez (indicada pela letra  $L$ ).

Existem também pesquisas sendo desenvolvidas para desenvolver estruturas que sejam fáceis de serem fabricadas com o auxílio de materiais convencionais não cristalinos. Um destes modelos é o proposto por Grima e Evans (2006) que propõe um modelo de triângulos rotativos. Na figura 13 podemos observar como é o modelo proposto pelos autores. De acordo com Grima e Evans (2006) este modelo seria facilmente fabricado a partir de chapas de metal.

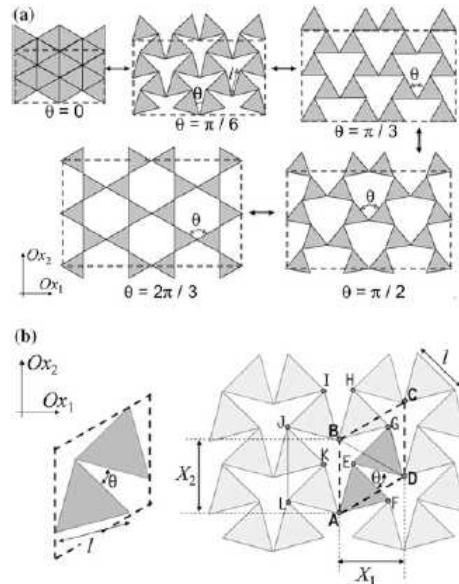


Figura 13: a- Representação do comportamento do modelo com triângulos rotativos. b- definição dos parâmetros geométricos utilizados para cálculo geométrico. FONTE: (GRIMA; EVANS, 2006)

Este modelo será melhor detalhado nos capítulo 4 apresentando os resultados obtidos pelo autor para este tipo de estrutura.

# 3 ELASTICIDADE DE SÓLIDOS AUXÉTICOS

A teoria da elasticidade estabelece como certo material se deforma quando sobre ele é aplicado uma tensão. Se as deformações aplicadas a um dado material desaparecem após a eliminação das tensões aplicadas dizemos que o material é elástico, e além disso, ele quando carregado uniaxialmente:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (3.1)$$

o material é dito linear elástico.

A equação acima é conhecida com lei de Hooke, onde  $E$  é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e ele determina a rigidez do material.

Neste capítulo iremos ver como se descreve a relação constitutiva de materiais elásticos, tanto os casos anisotrópicos (as propriedades se alteram quando medidas em diferentes direções) e isotrópicos (as propriedades são iguais independente da direção em que foi calculada), seguidos por uma análise dos limites dos coeficientes de Poisson para estes dois casos de materiais. Logo após, será apresentada uma análise da relação constitutiva para materiais isotrópicos com coeficiente de Poisson negativos e uma revisão bibliográfica de estudos realizados em materiais auxéticos que apresentam comportamento anisotrópico.

## 3.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA

A equação constitutiva de um material relaciona duas variáveis e só depende da organização molecular. Nesta seção veremos como obter a relação constitutiva para materiais isotrópicos partindo de uma relação global que é o caso de materiais anisotrópicos.

Sabemos que um material elástico as tensões e deformações são totalmente reversíveis quando estas tensões se encontram dentro do limite elástico do material. De acordo

com Love (2013), a função que define estes materiais é

$$\sigma_{ij} = F_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad (3.2)$$

onde  $F_{ij}$  é uma função de resposta do material.

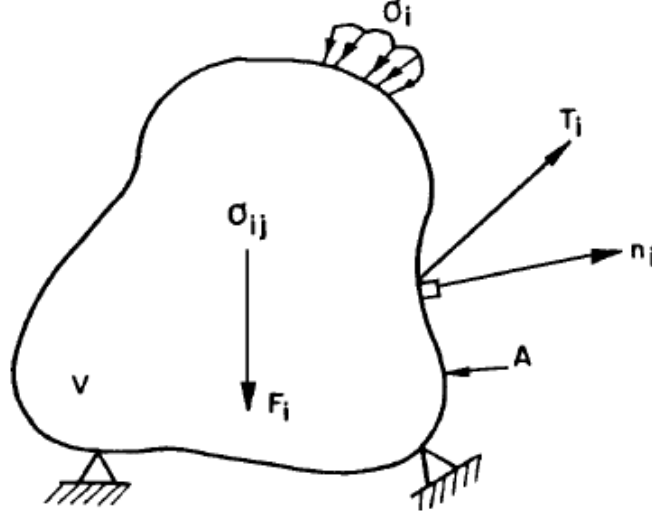


Figura 14: Representação de um sólido elástico em equilíbrio.

Utilizando o conhecimento sobre energia de deformação para um sólido como mostrados na Figura 14. Podemos chegar na relação conhecida como Modelo elástico de Green, que diz

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad e \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.3)$$

onde  $U_o$  é a energia de deformação e  $U_{co}$  é a energia complementar de deformação, na Figura 15 podemos observar como estas energias se relacionam em um gráfico de tensão  $\times$  deformação. Também é possível ver que para regimes lineares estas duas energias serão iguais.

Para materiais anisotrópicos a equação (3.2) pode ser escrita na forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad ou \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.4)$$

onde  $C$  e  $S$  são as matrizes rigidez e flexibilidade, respectivamente.  $C$  é um tensor de quarta ordem e contém 81 componentes. Por simetria dos tensores tensão e deformação, podemos dizer que

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad ; \quad C_{ijkl} = C_{jikl}; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (3.5)$$



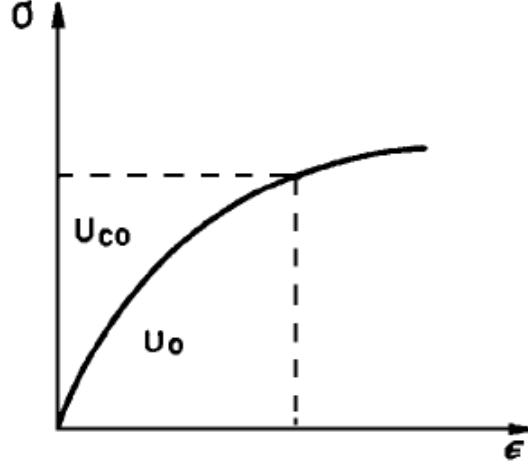


Figura 15: Gráfico Tensão × Deformação. Representação das áreas de energia de deformação complementar  $U_{co}$  e energia de deformação  $U_0$ .

Então as matrizes  $C$  e  $S$  passam a ter 21 componentes. A matriz  $S$  assume a seguinte forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1222} & S_{1333} & 2S_{1112} & 2S_{1123} & 2S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2223} & 2S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3323} & 2S_{3331} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1212} & 4S_{1223} & 4S_{1231} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2312} & 4S_{2323} & 4S_{2331} \\ 2S_{3111} & 2S_{3122} & 2S_{3133} & 4S_{3112} & 4S_{3123} & 4S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Sendo assim é possível simplificar a equação 3.2 para

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad e \quad \varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j. \quad (3.7)$$

De acordo com Lekhnitskii et al. (1964), se o material for elástico anisotrópico, a matriz flexibilidade passa a ter 21 componentes ao invés de 81. Isso porque uma mudança de base conveniente dos termos  $\varepsilon_{ij}$ , faz com que os termos  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  e  $\varepsilon_6$  sejam nulos. Logo, a matriz flexibilidade apresentará o seguinte formato:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

Considerando materiais que possuem simetria elástica apenas em um plano, podemos observar que alguns componentes da matriz  $S$  se reduzem a zero. São estes os componentes

$$S_{15} = S_{16} = S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{36} = S_{45} = S_{46} = 0. \quad (3.9)$$

Assim, o tensor  $S$  passa a ter 13 componentes, apresentando a seguinte forma

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Considerando agora a simetria elástica em três planos que são ortogonais uns aos outros as seguintes componentes se tornam zeros:

$$S_{14} = S_{15} = S_{16} = S_{24} = S_{25} = S_{26} = S_{34} = S_{35} = S_{36} = S_{54} = S_{56} = 0. \quad (3.11)$$

Então a matriz flexibilidade passa a ter 9 componentes independentes e se apresenta da seguinte forma

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Podemos escrever a matriz  $S$  em termos dos coeficientes mais comuns da engenharia, são eles: módulo de elasticidade ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e módulo de cisalhamento ( $G$ ). Sendo assim, podemos apresentar a matriz flexibilidades da seguinte maneira

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Como já foi dito, materiais isotrópicos são aqueles que as propriedades são iguais independente da direção em que essa propriedade foi medida, ou seja, todas as direções são elasticamente equivalentes. Portanto a matriz flexibilidade de um material isotrópico possui o seguinte formato

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

## 3.2 LIMITES PARA O COEFICIENTE DE POISSON

Como já foi apresentado por outros autores, o coeficiente de Poisson pode apresentar valores muitos grandes positivos ou negativos, mas isso só é válido para materiais anisotrópicos. Quando estamos analisando sólidos isotrópicos o coeficiente de Poisson possui limites, tanto inferior quanto superior.

No trabalho de LIM (2014) ele apresenta duas formas distintas para encontrar estes limites para materiais isotrópicos. No primeiro caso, ele considera uma pressão hidrostática atuando sobre um sólido isotrópico, onde a relação constitutiva apresentaria a seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -p \\ -p \\ -p \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

Uma vez que existe uma pressão hidrostática aplicada sobre o sólido, então teremos uma redução nas dimensões do mesmo, ou seja, as deformações negativas devem ser normais. Portanto

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \leq 0. \quad (3.16)$$

Logo

$$\nu \leq \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Para encontrar o limite inferior LIM (2014) considerou que sobre um sólido estaria sendo aplicado um tensão de cisalhamento no plano 2-3. Portanto a relação constitutiva

para este caso possui a seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{2}{2(1+\nu)} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Uma vez que a direção da tensão de cisalhamento deve ser correspondente com a deformação de cisalhamento, temos que

$$\frac{1+\nu}{E} \geq 0. \quad (3.19)$$

Então

$$\nu \geq -1. \quad (3.20)$$

Outra forma apresentada pelo autor para chegar a estes limites de coeficiente de Poisson é utilizando o conceito de energia de deformação. Neste caso, o autor conseguiu apresentar os limites de acordo com o número de dimensões do problema. O autor encontrou que

$$\frac{(d-1)(d-4)}{2} \leq \nu \leq \frac{(d-1)(10-3d)}{4}, \quad (3.21)$$

onde,  $d=1,2,3$  refere-se ao números de dimensões. Portanto

$$\begin{aligned} \nu &= 0; & d &= 1 \\ -1 &\leq \nu \leq 1; & d &= 2. \\ -1 &\leq \nu \leq \frac{1}{2}; & d &= 3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Após conseguir encontrar os limites dos coeficientes de Poisson para materiais isotrópicos, podemos começar a analisar como a relação constitutiva para os materiais isotrópicos, com ênfase aos materiais auxéticos.

Analisando a matriz flexibilidade, podemos perceber que para materiais auxéticos isotropicos, ou seja,  $-1 \leq \nu < 0$ , os componentes da matriz serão todos positivos. Enquanto para materiais convencionais ( $\nu \geq 0$ ), os elementos da matriz são todos negativos. Outra importante relação que é possível perceber quando analisamos a matriz flexibilidade dentro do intervalo dos coeficientes de Poisson válidos para materiais isotropicos, é que para materiais auxéticos, os componentes da diagonal quando  $i=1,2,3$  são sempre maiores que os componentes com  $i=4,5,6$ . Para os materiais convencionais, esta relação é contrária, ou seja, os termos com  $i=1,2,3$  são menores que os termos com  $i=4,5,6$ .

A partir dessa análises, percebe-se que a matriz flexibilidade apresenta um comportamento peculiar quando os valores dos coeficientes de Poisson são  $\nu = -\frac{2}{3}$ ,  $\nu = -\frac{1}{2}$  e

$\nu = -1$ . Abaixo podemos ver como a matriz flexibilidade se comporta para estes valores de coeficiente de Poisson.

$$S_{ij} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} ; \quad \nu = -\frac{2}{3} \quad (3.23)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ; \quad \nu = -\frac{1}{2} \quad (3.24)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \nu = -1 \quad (3.25)$$

### 3.3 GRANDES DEFORMAÇÕES PARA MATERIAIS AUXÉTICOS

A teoria das grandes deformações supõe que o estado indeformado e deformado de um dado meio contínuo são diferentes, portanto as hipóteses das deformações infinitesimais não são válidas. Existem muitos estudos sobre a teoria das grandes deformações para materiais convencionais, mas quando vamos olhar para os materiais auxéticos, os estudos ainda estão em fases iniciais.

Blatz e Ko (1962) propôs um modelo de cálculo do coeficiente de Poisson usando a teoria das grandes deformações. Para isso eles utilizaram um conjunto de dados experimentais obtidos pelo ensaio de uma espuma de poliuretano emborracha em três diferentes campos de tensões, baseados nesses dados eles geraram uma função densidade de energia que correlaciona os dados com alta precisão. O coeficiente de Poisson encontrado pelo modelo de Blatz-Ko é dado por

$$\nu = \frac{1 - \lambda^{\nu_0}}{\lambda - 1} \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  é a extensão na direção do carregamento e  $\nu_0$  é o coeficiente de Poisson infinitesimal.

Apesar dessa relação obtida por Blatz e Ko (1962) ser válida, Ciambella e Saccomandi (2014) verificaram que as espumas auxéticas apresentavam um comportamento mais complexo. Isso porque verifica-se uma mudança significativa da microestrutura do material quando sobre ele era aplicado uma grande deformação. Para mostrar isso, podemos analisar o modelo microestrutural hexagonal com reentradas na Figura 16. Pode-se observar que quando tracionamos este modelo o material tende a se expandir lateralmente, mas quando as células estão completamente abertas e continua-se tracionando o modelo o mesmo passa a contrair lateralmente.

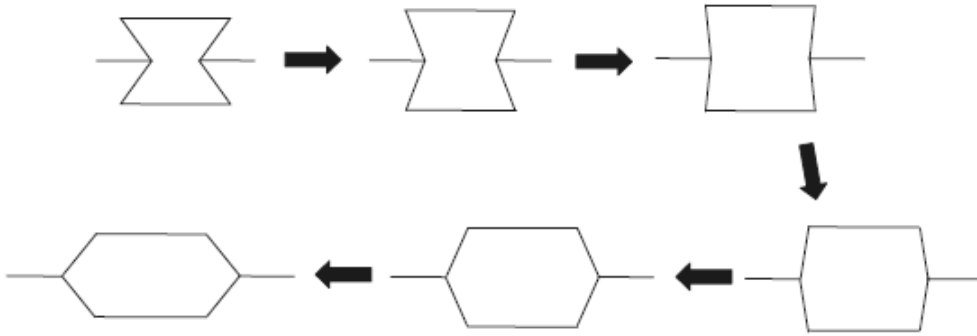


Figura 16: Representação da expansão lateral de um modelo de reentradas quando este esta se expandindo e contraindo. FONTE: (LIM, 2014).

Então Ciambella e Saccomandi (2014) propôs a seguinte função para cálculo do coeficiente de Poisson:

$$\nu = \frac{\nu_0}{(1 + \pi^2 \nu_0^2 (\lambda - 1)^2)^q}, \quad (3.27)$$

onde

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi^2(\lambda_1 - 1)^2 \nu_0^2}. \quad (3.28)$$

Usando as equações 3.27 e 3.28 Ciambella e Saccomandi (2014) plotou gráficos relacionando o coeficiente de Poisson e a elongação, para vários valores de  $\nu_0$  utilizando valores constantes de  $\lambda_1$ , como podemos ver na Figura 17. Para valores de  $\nu_0 = -0,53$  e  $\lambda_1 = 1,33$  eles chegaram próximo aos resultados experimentais obtidos por (CHOI; LAKES, 1992), que estudaram as propriedades não lineares de polímeros com coeficientes de Poisson negativo.

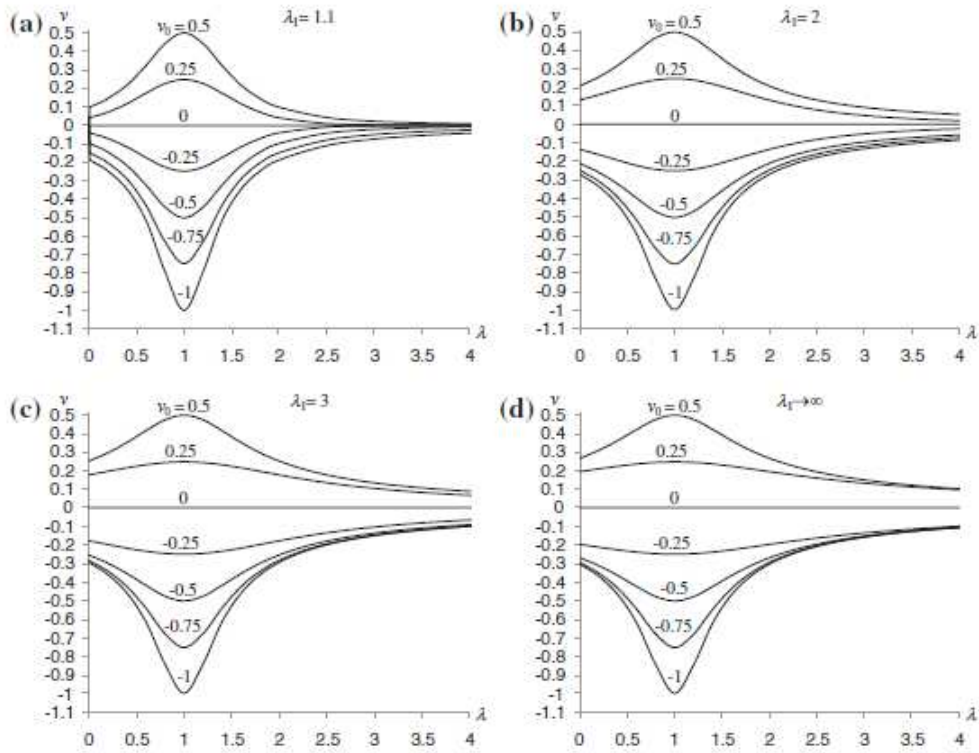


Figura 17: Relação do coeficiente de Poisson de acordo com (CIAMBELLA; SACCOMANDI, 2014) em função da elongação  $\lambda$  para vários valores de  $\nu_0$ . FONTE: (CIAMBELLA; SACCOMANDI, 2014)

## 4 ELEMENTOS DE VIGA EULER-BERNOULLI

Nesta parte do trabalho estaremos apresentando como é desenvolvido o método para calcular deformações em elementos de viga utilizando a técnica de elementos finitos, baseando-se no trabalho apresentado por Filho (2008). Primeiramente apresentaremos a teoria de vigas que descreve o comportamento físico deste tipo de elemento, em seguida iremos mostrar como é montado a matriz rigidez deste tipo de elemento, e consequentemente como é obtido as deformações tendo em mãos as condições de contorno adotadas no problema.

Um elemento de viga é uma barra de comprimento muito maior do que as dimensões da sua seção transversal e podem transmitir forças axiais, momentos fletores, forças cortantes e momentos torçores. Para análise desse tipo de elemento é importante levarmos em consideração a lei das seções planas. Nessa lei considera-se que qualquer seção transversal da viga, que é inicialmente plana, mantém-se plana após a deformação. Outro ponto importante para se levar em consideração é que neste tipo de estruturas as uniões entre os elementos são rígidas.

Podemos observar na Figura 18 uma representação de uma viga e o todos os esforços possíveis que podem atuar sobre ela. Para o caso de pequenos deslocamentos as forças axiais  $f1$  e  $f7$  e momentos torçores  $f4$  e  $f10$  são independentes, ou seja, aplicar momentos fletores sobre a viga não irá ocasionar o surgimento de forças axiais. Para o caso de momentos fletores só podemos considera-los como independentes se os planos  $xy$  e  $xz$  coincidirem com os eixos principais da seção transversal da viga, ou seja, as forças cortantes  $f2, f8, f6$  e  $f12$  irão depender apenas dos deslocamentos nesse plano, não sendo afetado pela flexão que ocorre no plano perpendicular. Definindo *Eixo x* como o eixo que passa pelos centroides das seções transversais e *Eixo y* e *Eixo z* como sendo os eixos que passam pelo centroide e que coincidem com os eixos principais.

Iremos estudar os fenômenos de rigidez axial, a flexão no eixos  $xy$  e  $xz$  como elementos independentes e em seguida iremos apresentar como é montada a matriz rigidez e depois iremos mostrar como juntar as matrizes rigidez de cada elemento em uma matriz única que determina o comportamento da estrutura.



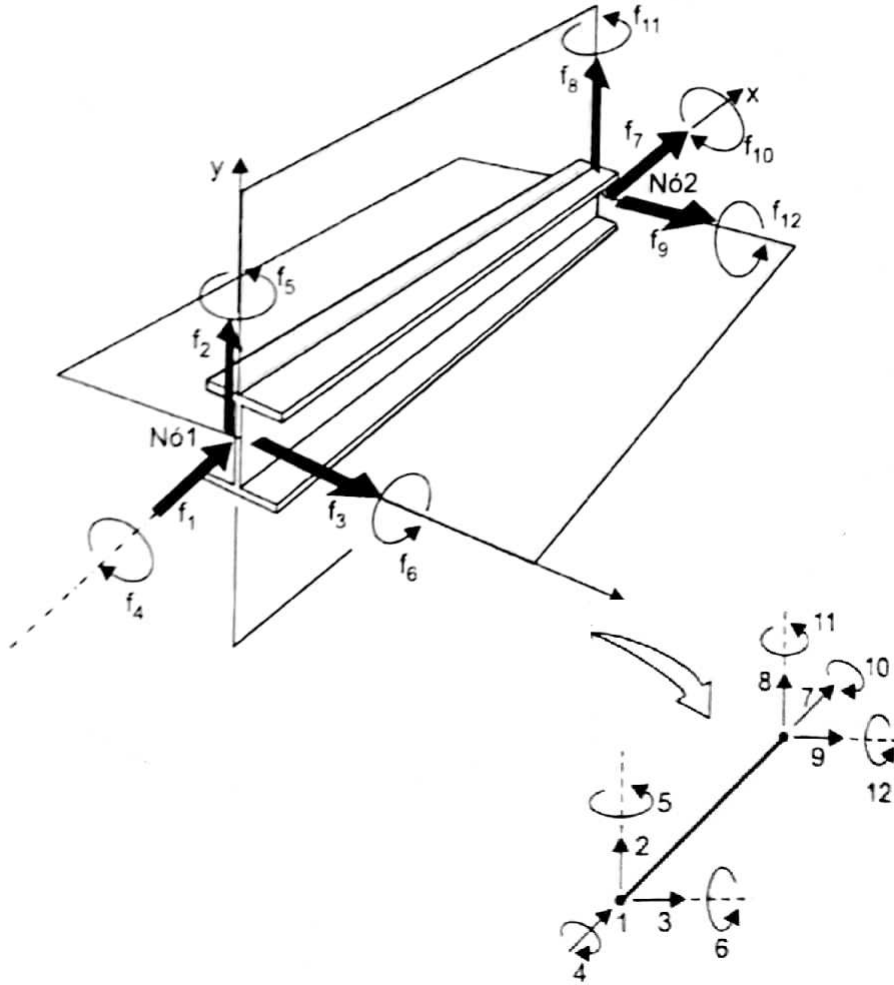


Figura 18: Forças Cortantes, Forças Axiais, Momento Fletores e Momentos Torçores atuantes em uma viga. FONTE:(FILHO, 2008)

## 4.1 COMPORTAMENTO DE VIGAS SOBRE TENSÕES AXIAIS

Primeiramente iremos fazer uma revisão do comportamento de uma viga que está sobre o efeito de forças axiais. A viga da Figura 19 está em equilíbrio. Fazendo um corte na seção A-A teremos dois trechos (I) e (II) que também estarão em equilíbrio. A força  $F$  distribuída uniformemente sobre a área de seção transversal da viga da origem as tensões normal que pode ser expressa como a força axial por unidade de área. Assim

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (4.1)$$

A deformação linear pode ser expressa como

$$\varepsilon = \frac{d}{L}. \quad (4.2)$$

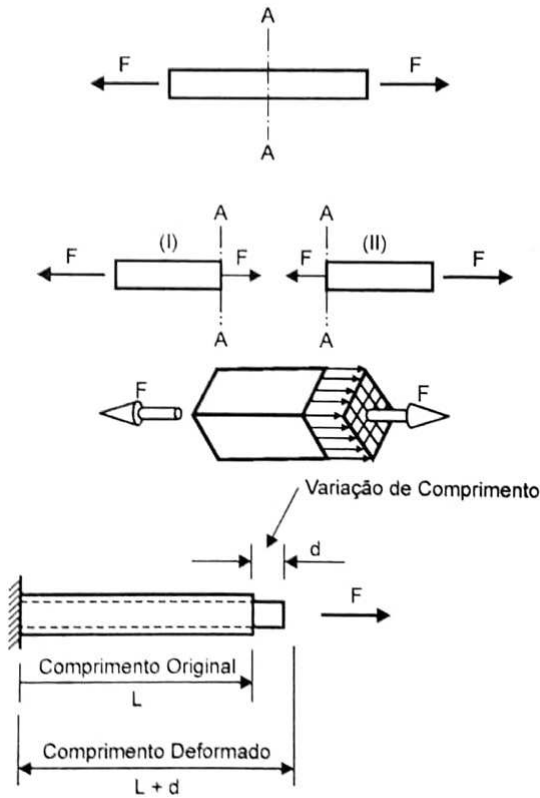


Figura 19: Esforços Axiais em uma viga sendo tracionada. FONTE: (FILHO, 2008)

Pela teoria da Elasticidade, podemos relacionar a tensão com a deformação utilizando a lei de Hooke. Logo:

$$\sigma = \varepsilon E; \quad (4.3)$$

$$\frac{F}{A} = \frac{d}{L} E; \quad (4.4)$$

$$F = \frac{EA}{L} d. \quad (4.5)$$

Comparando o elemento de viga com uma mola de acordo com a Figura 20. Podemos determinar a rigidez do elemento de viga da seguinte forma:

$$F = kx; \quad (4.6)$$

$$F = \frac{EA}{L} d. \quad (4.7)$$

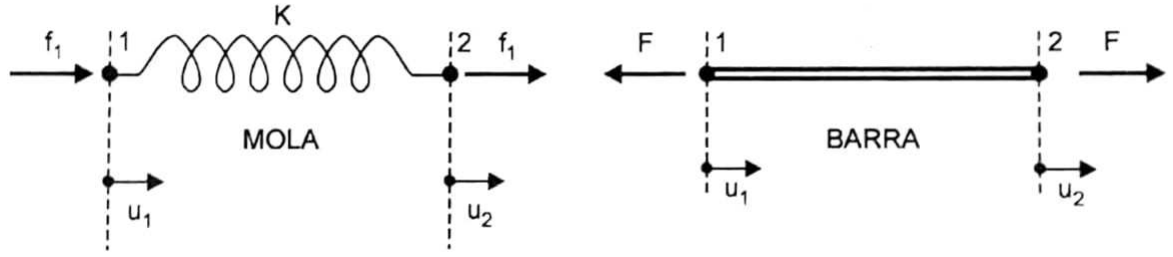


Figura 20: Comparação mola  $\times$  viga. FONTE: (FILHO, 2008)

Logo, a constante  $\frac{AE}{L}$  define a rigidez axial do elemento

#### 4.1.1 MATRIZ RIGIDEZ

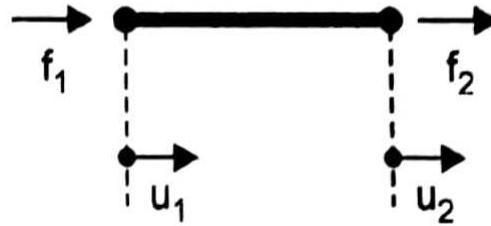


Figura 21: Esforços Axiais e deslocamentos aplicados nos nós 1 e 2. FONTE: (FILHO, 2008)

Para determinarmos a matriz rigidez da viga sobre forças axiais aplicamos os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  nos nós 1 e 2 como é mostrado na figura 21. Logo, como o elemento está em equilíbrio podemos dizer que

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Logo:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

## 4.2 COMPORTAMENTO DE VIGAS À FLEXÃO

### 4.2.1 TENSÕES NORMAIS

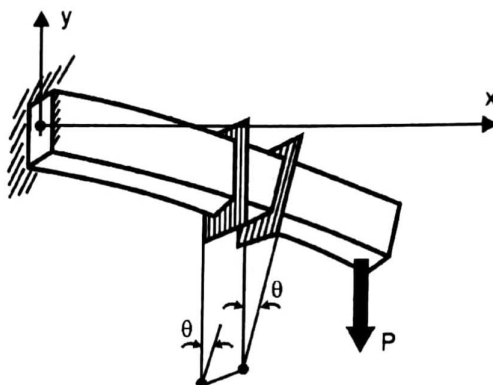


Figura 22: Viga sobre o efeito de um carregamento P. FONTE: (FILHO, 2008)

Agora iremos estudar o comportamento de uma viga quando ela está sujeita a ações de esforços cortantes e momentos fletores. Considere uma viga que sofre ação de um carregamento P como é apresentado na Figura 22.

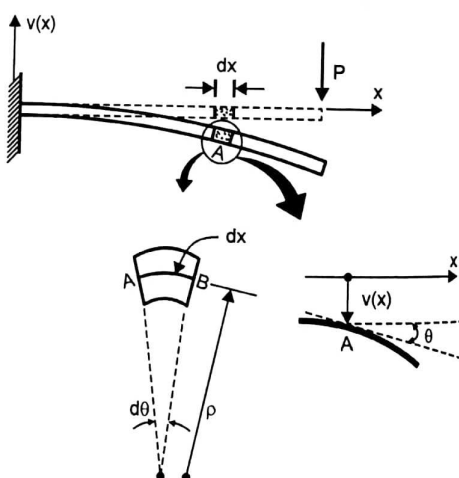


Figura 23: Configuração da viga deformada. FONTE: (FILHO, 2008)

As fibras da porção superior estão sendo alongadas enquanto as fibras inferiores estão comprimindo. Na transição entre a parte superior e a inferior temos a linha neutra que não sofre deformação. De acordo com a Figura 23 a intensidade da curvatura que é definida como  $\frac{1}{\rho}$  é dependente diretamente do momento atuante. Para qualquer ponto x dizemos que o deslocamento em y é  $v(x)$ . Logo, a inclinação da função, pode ser dada por:

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \theta. \quad (4.10)$$

Como o comprimento AB permanece inalterado antes e depois da flexão, considerando a linha neutra e como estamos analisando o caso de pequenas deformações, podemos dizer que

$$tg\theta \approx \theta_{rd}; \quad (4.11)$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} \approx tg\theta_{rd}. \quad (4.12)$$

Como

$$d\theta = \frac{dx}{\rho}. \quad (4.13)$$

Logo, a curvatura pode ser expressa como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}. \quad (4.14)$$

Substituindo a Eq. 4.12 na Eq. 4.14 encontramos que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}(v'(x)) \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = v''(x). \quad (4.15)$$

Portanto, a curvatura da viga em um ponto pode ser expressa por

$$\frac{1}{\rho} = v''(x). \quad (4.16)$$

A intensidade da curvatura é diretamente proporcional ao momento aplicado. Logo, podemos escrever que

$$M(x) = +kv''(x), \quad (4.17)$$

sabendo que  $k$  depende do material e das propriedades da seção da viga de acordo com a resistência dos materiais, podemos dizer que

$$K = EI. \quad (4.18)$$

Substituindo a Eq. 4.17 na Eq. 4.16 podemos perceber que para um dado momento fletor, quanto maior for  $EI$ , menor será a curvatura apresentada. A deformação pode ser expressa como

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = yv''(x) = y\frac{M}{EI}. \quad (4.19)$$

Logo,

$$\sigma = \frac{M}{I}y. \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 TENSÕES DE CISALHAMENTO

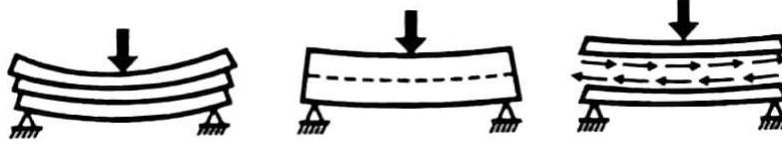


Figura 24: Viga com fibras separadas e viga uniforme. FONTE: (FILHO, 2008)

Considere as duas vigas mostrada na Figura 24, onde uma viga tem as fibras separadas e a outra é um bloco único. Ao aplicarmos um carregamento nessas duas vigas da maneira que é apresentado na figura, a viga que tem as fibras separadas apresenta um escorregamento das fibras uma em relação a outra, enquanto na viga única não podemos observar este comportamento. Na viga única as fibras não se separam devido às tensões de cisalhamento.

Sabemos que a tensão de cisalhamento em uma fibra a uma distância  $y$  da linha neutra, pode ser expressa como:

$$\tau = \frac{QM_s}{bI}, \quad (4.21)$$

onde,  $Q$  é o esforço cortante na seção transversal considerada,  $b$  é a largura da fibra considerada e  $M_s$  é o momento estático que pode ser expresso como

$$M_s = \int ydA. \quad (4.22)$$

Esta última expressão também é válida para a tensão de cisalhamento vertical, já que ela possui a mesma intensidade. Outra relação que também pode ser útil, é a relação entre o momento fletor e a força cortante. Fazendo a soma dos momentos de um elemento infinitesimal de uma viga, podemos chegar na relação dada por

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (4.23)$$

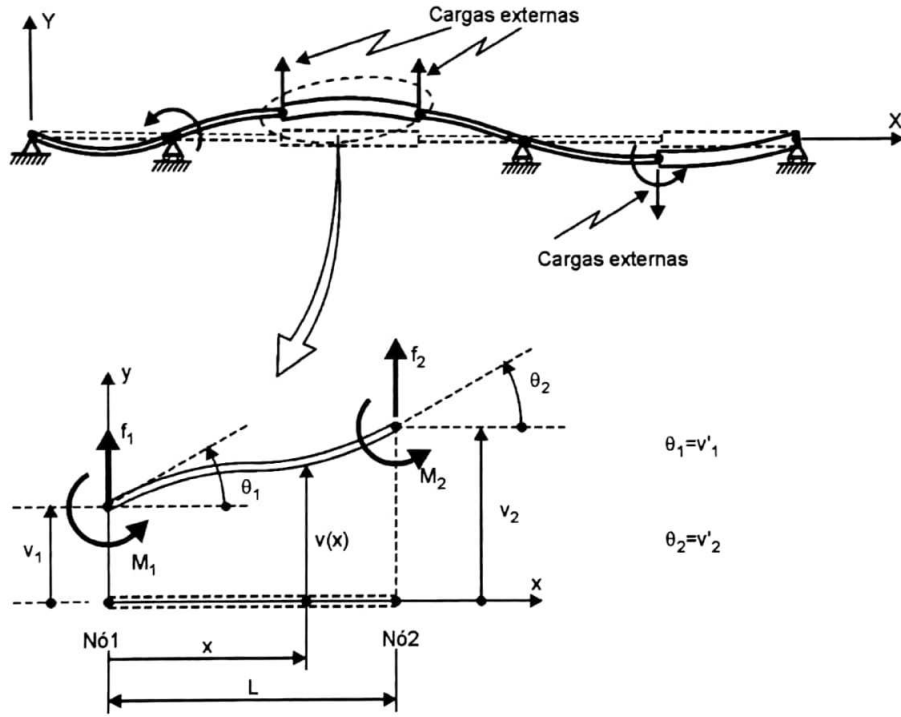


Figura 25: Forças Cortantes, Forças Axiais, Momento Fletores e Momentos Torçores atuantes em uma viga. FONTE: (FILHO, 2008)

### 4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

Considerando a estrutura apresentada na Figura 25 e retirando um elemento desta estrutura, podemos dizer que o elemento está em equilíbrio se toda esta estrutura também está em equilíbrio. Como estamos considerando apenas esforços cortantes e momentos fletores, o equilíbrio do elemento pode ser representado com dois esforços cortante, um em cada nó, e dois momento fletores. Logo, podemos dizer que teremos quatro componentes de forças e quatro componentes de deslocamentos, que serão representadas da seguinte forma matricial:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}; \quad (4.24)$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix}. \quad (4.25)$$

A relação entre as forças e os deslocamentos é dada por:

$$\{f\} = [k]^e \{\delta\}, \quad (4.26)$$

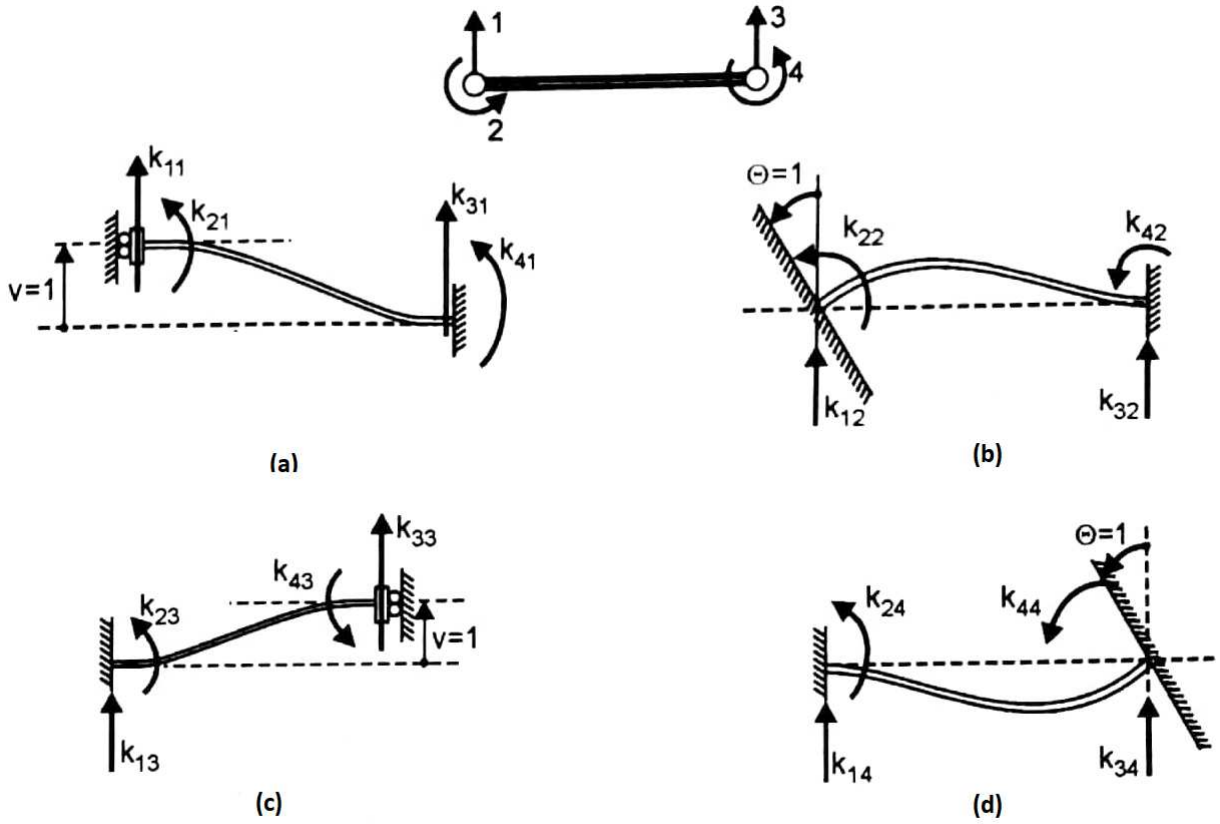


Figura 26: Graus de liberdade do elemento de viga com rigidez a flexão. (a) Deslocamento unitário do G.L. 1, (b) Deslocamento unitário do G.L. 2, (c) Deslocamento unitário do G.L. 3, (d) Deslocamento unitário do G.L. 4. FONTE: (FILHO, 2008)

onde  $[k]^e$  é a matriz rigidez do elemento. O coeficiente  $k_{ij}$  da matriz rigidez representa a força no grau de liberdade  $i$  devido ao deslocamento unitário imposto no grau de liberdade  $j$ . Por exemplo, dada a viga da Figura 26, se impomos um deslocamento unitário no grau de liberdade 1 como é visto na Figura 26 (a) estaremos encontrando os seguintes termos da matriz.

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & \bullet & \bullet & \bullet \\ k_{21} & \bullet & \bullet & \bullet \\ k_{31} & \bullet & \bullet & \bullet \\ k_{41} & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Então, para cada grau de liberdade, estaremos encontrando uma coluna da matriz rigidez local.



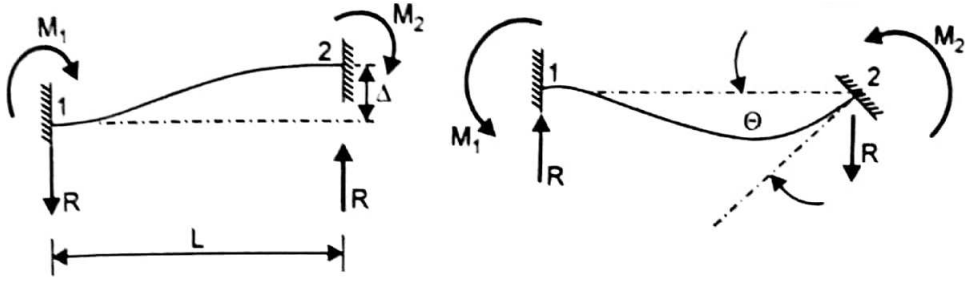


Figura 27: Relação entre deslocamentos imposto nas extremidades da viga, e consequentes esforços nos nós. FONTE: (FILHO, 2008)

Para determinarmos os valores de cada termo iremos impor um deslocamento  $\delta$  e uma rotação  $\theta$ , como pode ser visto na Figura 27, e verificar as forças que surgem nas vigas.

Da Figura 27 (a), podemos retirar que

$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{L^2}\delta; \quad R = \frac{12EI}{L^3}\delta. \quad (4.28)$$

Para  $\delta = 1$ :

$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad R = \frac{12EI}{L^3}. \quad (4.29)$$

Da Figura 27 (b), podemos retirar que

$$M_1 = \frac{2EI}{L}\theta; \quad M_2 = \frac{4EI}{L}\theta; \quad R = \frac{6EI}{L^2}\theta. \quad (4.30)$$

Para  $\theta = 1$ :

$$M_1 = \frac{2EI}{L}; \quad M_2 = \frac{4EI}{L}; \quad R = \frac{6EI}{L^2}. \quad (4.31)$$

Logo, a matriz rigidez será

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

## 4.4 PÓRTICO PLANO

Até agora representamos os casos em que o comportamento axial da viga é independente, ou seja, a ação de momentos fletores na viga não gera esforços axiais. Na Figura

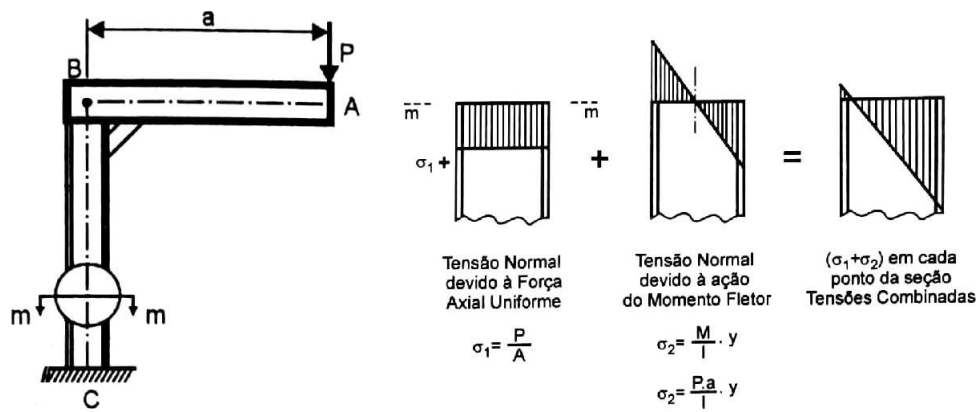


Figura 28: Representação de um Pórtico Plano. FONTE: (FILHO, 2008)

28, é mostrado um pórtico plano. O comportamento da viga AB pode ser representada da maneira que estudamos até aqui, como uma viga que está sujeita apenas a esforços de flexão.

Mas quando analisamos a viga BC, percebe-se que está sujeita a uma força axial e a um momento de flexão, então este elemento de viga não pode ser formulado pelo comportamento até agora estudado, pois, embora o elemento até agora estudado represente o comportamento de carregamento por flexão, ele não leva em consideração o esforço axial aplicado a viga. Surge então, a necessidade de formular um elemento de viga mais completo, que leva em consideração estes dois fenômenos. Como os comportamentos são lineares, será utilizado o princípio de superposição para verificar as tensões normais atuantes na viga, já que a força axial induz apenas deslocamento axiais na viga, não interferindo nos deslocamentos relacionados a flexão.

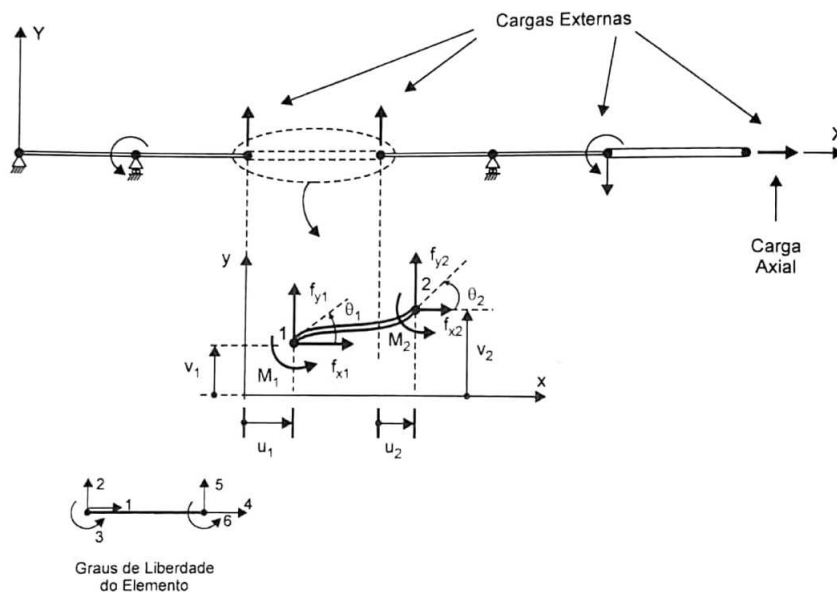


Figura 29: Elemento de Viga com Rigidez Axial e a Flexão. FONTE: (FILHO, 2008)

Na Figura 29 podemos perceber que o elemento agora está sujeito a 6 graus de liberdade. Logo, os vetores força e deslocamento podem ser representadas da seguinte maneira

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix}; \quad (4.33)$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.34)$$

Utilizando o mesmo método utilizado na seção passada, e chamando de  $a = \frac{EA}{L}$  e  $b = \frac{EI}{L^3}$ , a matriz rigidez do elemento que apresenta rigidez axial e rigidez a flexão pode ser escrita como:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

#### 4.4.1 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Podemos agora utilizar o elemento que leva em conta a rigidez axial e a flexão para resolver o problema dos pórticos planos. Mas, existem casos onde os elementos não estão alinhados, como pode ser visto na Figura 30. Neste caso é preciso relacionar as forças e os deslocamentos de cada elemento a um sistema de referência comum. Para isso usaremos o recurso da matriz transformação.

Como podemos observar na Figura 30 o plano  $xy$  do elemento local está inclinado a um ângulo  $\alpha$  em referência ao plano de  $XY$  global. Sendo,  $F$  e  $\bar{M}$  as forças globais no

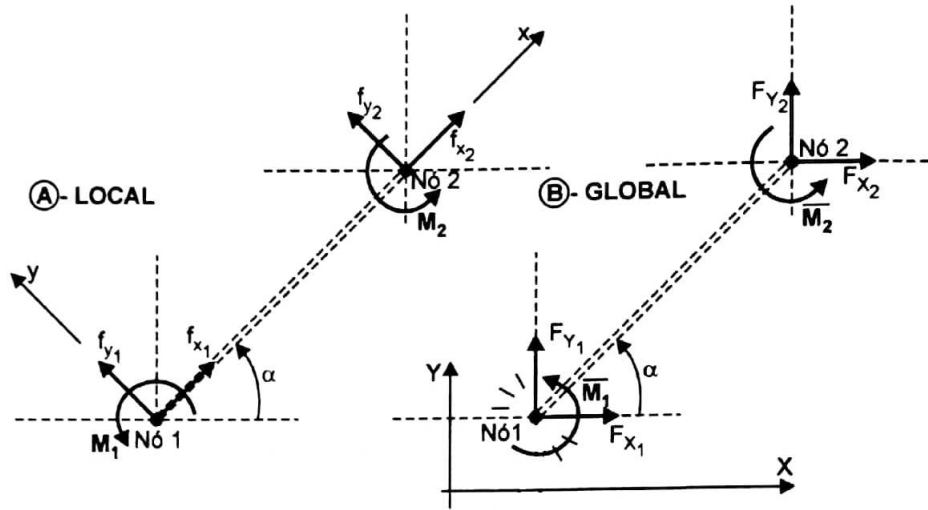


Figura 30: Elemento de Viga com Rigidez Axial e a Flexão. FONTE: (FILHO, 2008)

eixo \$xy\$, a correspondência das forças nos dois sistemas pode ser dada por

$$\begin{cases} f_{x1} = F_{X1}\cos\alpha + F_{Y1}\sen\alpha \\ f_{y1} = -F_{X1}\sen\alpha + F_{Y1}\cos\alpha \\ M_1 = \bar{M}_1 \\ f_{x2} = F_{X2}\cos\alpha + F_{Y2}\sen\alpha \\ f_{y2} = -F_{X2}\sen\alpha + F_{Y2}\cos\alpha \\ M_2 = \bar{M}_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

Matricialmente podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ \bar{M}_1 \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.37)$$

onde,

$$\mu = \sen\alpha; \quad \lambda = \cos\alpha. \quad (4.38)$$

A matriz rigidez no sistema global do elemento pode ser expressa como

$$[K]^e = [T]^t [k]^e [T]. \quad (4.39)$$

Logo, a matriz rigidez global para um elemento com rigidez axial e à flexão

$$[K]^e = \begin{bmatrix} a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a - 12b)\lambda\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & & & \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 4bL^2 & & & \\ -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -(a - 12b)\lambda\mu & 6bL\mu & a\lambda^2 + 12b\mu^2 & & \\ -(a - 12b)\lambda\mu & -a\mu^2 - 12b\lambda^2 & -6bL\lambda & (a - 12b)\lambda\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 2bL^2 & 6bL\mu & -6bL\lambda & 4bL^2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

## 4.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

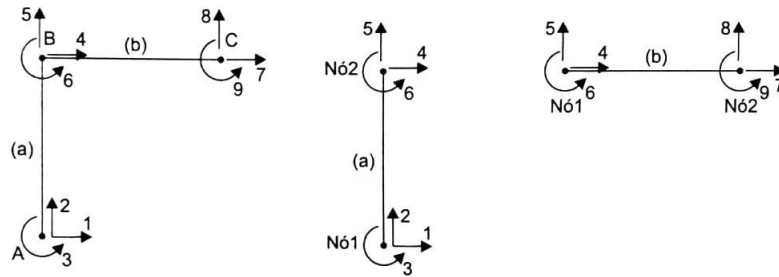


Figura 31: Numeração dos graus de liberdade. FONTE: (FILHO, 2008)

Após determinar a rigidez de cada elemento da estrutura, temos que determinar a rigidez de toda a estrutura. Para isso é preciso identificar como cada termo da matriz de rigidez do elemento irá influenciar na matriz de rigidez da estrutura. Sabe-se que os coeficiente I,J da matriz rigidez do elemento serão adicionados nos mesmos termos I,J da matriz da estrutura. Abaixo podemos ver como esse método funciona para um pórtico plano, na Figura 31 temos a representação do pórtico e dos graus de liberdade em cada nó.

A matriz rigidez de cada elemento é dada por

$$[K]^a = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & \frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & \frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.41)$$

$$[K]^b = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & \frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Logo, a matriz rigidez da estrutura será

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & \frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{EA_2}{L_2} & 0 + 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} + 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 + 0 & \frac{EA_1}{L_1} + \frac{12EI_2}{L_2^3} & 0 + \frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & \frac{6EI_1}{L_1^2} + 0 & 0 + \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & \frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & -\frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}.$$

Com a matriz rigidez da estrutura é possível obter as equações constitutivas desse sistema. Assim, tendo em mãos as condições de contorno que descrevem o problema, podemos determinar os esforços e os deslocamentos em cada nó da estrutura.

# 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é uma maneira de determinar a solução de um problema cujo o modelo matemático que o descreve já seja conhecido, mas que sua solução analítica é difícil ou não pode ser desenvolvida. Basicamente o método resolve um problema de equações diferenciais parciais transformando-as em um sistema linear. Então, este sistema pode ser solucionado utilizando alguns métodos numéricos como, por exemplo, eliminação de Gauss.

O método dos elementos finitos discretiza todo domínio ao qual se deseja a solução. Na figura 32 podemos observar um domínio discretizado. Existe hoje vários tipos de elementos utilizados para esta discretização, por exemplo, em problemas unidimensionais utiliza-se segmentos. No caso bidimensional é comum ver a utilização de triângulos ou quadriláteros. Já no caso tridimensional estes elementos são hexaedros, tetraedros ou pentaedros. Na Figura 33 podemos verificar uma exemplificação destes elementos.

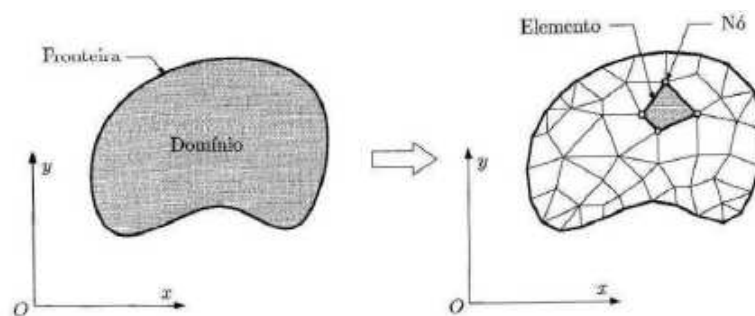


Figura 32: Representação de um domínio discretizado.

Após essa discretização, cada elemento é tratado de acordo com as leis matemáticas pelo qual aquele elemento é regido, de forma sequencial e estruturada. Então é possível se chegar na solução global agrupando todas as soluções discretizadas. É essencial que se tenha em mente que este é um método numérico, ou seja, é um método aproximado que contém erro. Portanto, para um bom aproveitamento da ferramenta, é importante dominar a modelagem, definindo as componentes geométricas, das propriedades dos materiais e do meio contínuo, e determinar de maneira correta as fronteiras e solicitação a que o sistema está sujeito.

O método é utilizado por todas as áreas que buscam uma solução para problemas complexos que não possuem solução analíticas. Por exemplo, você pode facilmente descrever as tensões principais e deformações em uma barra de torção simples, mas quando deseja-se estudar o estado de tensões de uma estrutura mais complexa, como por exemplo, uma asa de avião, esta análise se torna bem mais difícil de se resolver analiticamente. O método não é utilizado apenas para análises numéricas. Ele também é utilizado para: mecânicas dos fluidos, vibrações, plasticidades, estudos de conformação plástica, entre outras.

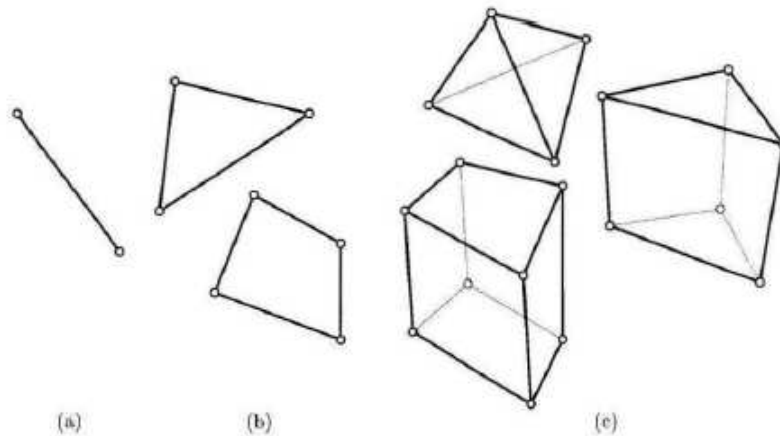


Figura 33: Tipos de elementos utilizados em uma discretização em elementos finitos.

## 5.1 ELEMENTOS FINITOS EM MATERIAIS AUXÉTICOS

Como já foi visto, o método numérico é uma excelente ferramenta para encontrar soluções quando analiticamente se torna difícil. Os materiais auxéticos vem utilizando bastante desta ferramenta, tanto para propor novos modelos microestruturais que descrevem o comportamento deste materiais, quanto para conseguir achar uma função para descrever o coeficiente de Poisson. Nesta seção é feita uma descrição de alguns estudos que utilizaram a teoria de elementos finitos na análise de materiais auxéticos.

No trabalho de Taylor et al. (2014) pode-se verificar um modelo parecido com o proposto por Grima e Evans (2006). Neste trabalho ele pega chapas de metal de baixa porosidade perfuradas em formatos diferentes para verificar o que acontece com o coeficiente de Poisson dessas chapas de acordo com a mudança das perfurações.

O coeficiente de Poisson pode ser controlado alterando a razão de aspecto dos furos. Na Figura 34 podemos observar a geometria adotada pelo trabalho de Taylor et al. (2014).

A razão de aspecto é dada por  $\frac{a}{b}$  e é observada em chapas com porosidade de  $\Psi = 2\%, 3\%, 4\% \text{ e } 5\%$ . Verificou-se que para alto valores de razão de aspecto o coeficiente de Poisson se tornar negativo, sendo assim, fica fácil controlar o coeficiente de Poisson da



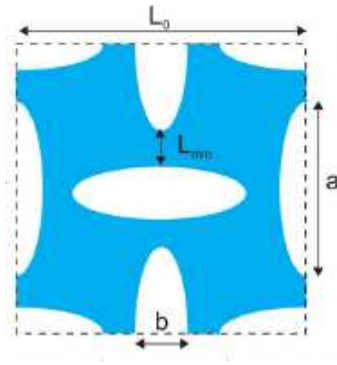


Figura 34: Principais dimensões da chapa. FONTE: (TAYLOR et al., 2014)

estrutura, bastando apenas controlar a variável razão de aspecto. Na Figura 35 podemos observar a comparação do estudo numérico e experimental realizado por Taylor et al. (2014). Pode-se observar no trabalho que chegou-se a resultados bastantes próximos e que a modelagem numérica pode ser bastante aproveitada para controlar o coeficiente de Poisson deste tipo de estrutura.

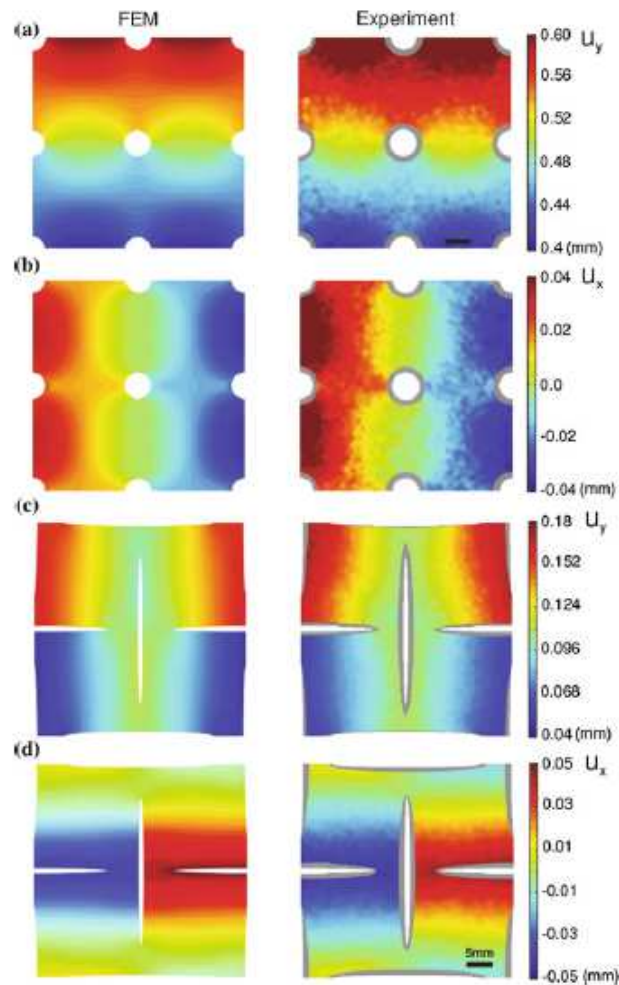


Figura 35: Comparação entre os resultados experimentais e uma modelagem numérica representando o modelo de triângulos rotativos. FONTE:(LIM, 2014)

Também podemos verificar o uso da ferramenta numérica no trabalho de Chen et

al. (2013). Nesse trabalho os autores fizeram um estudo analítico e numérico do modelo tetra-aquiral, onde cada anel rígido é conectado por quatros ligamentos que são ligados tangencialmente aos anéis. Na Figura 36 podemos ver uma representação da estrutura básica de tal modelo. Baseado nessa estrutura Chen et al. (2013) chegou a seguinte relação para coeficiente de Poisson:

$$\nu_{xy} = -\frac{L_x}{L_y}. \quad (5.1)$$

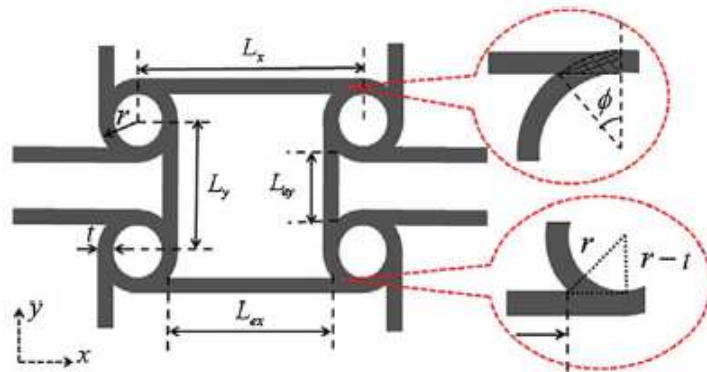


Figura 36: Geometria de uma colmeia tetra-aquiral. FONTE: (LIM, 2014)

Na Figura 37 podemos verificar a geometria modelada por elementos finitos, juntamente com os experimentos realizados para validar a simulação numérica. Eles fizeram quatro diferentes testes experimentais com um modelo de colmeia que foi fabricado no formato do modelo proposto. Os teste realizados foram: (A) compressão no plano, (B) flexão em três pontos, (C) e (D) Tração em diferentes direções. A análise em elementos finitos foi feita considerando os mesmo testes, e então uma comparação entre os resultados experimentais e numérica foi feita para a validação do modelo.

Sendo,

$$\alpha_x = \frac{L_x}{r}; \quad e \quad \alpha_y = \frac{L_y}{r}. \quad (5.2)$$

Os resultados obtidos por Chen et al. (2013) podem ser observados na Figura 38. Eles observaram que era possível obter diferentes coeficientes de Poisson negativos variando os comprimentos  $L_x$  e  $L_y$ . Assim, é possível através do método numérico decidir os coeficiente de Poisson e fabricar uma nova estrutura de acordo com necessidade de aplicação.

Outro estudo bastante interessante foi feito por Ge, Hu e Liu (2013). Eles propuseram um modelo para se criar um tecido que se comportaria como um material auxético. A representação do modelo pode ser vista na Figura 39. É possível perceber que existem três tipos de fios, os de trama, os de teia e os de ponto. Os fios de trama e teia são posicionados

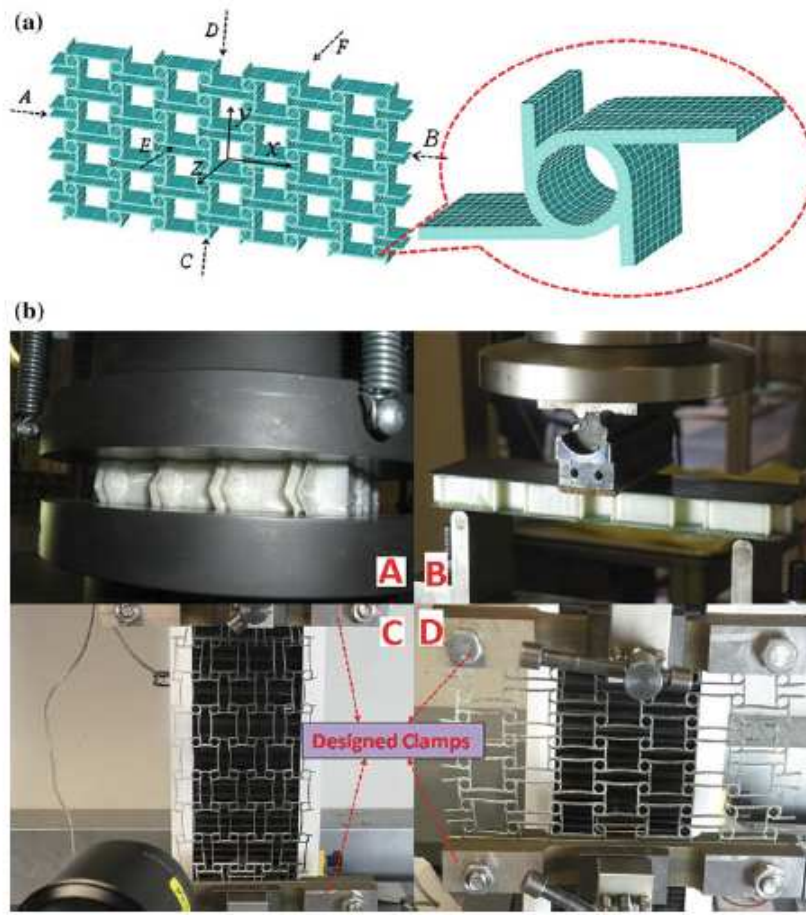


Figura 37: (a) Modelo em elementos finitos, e (b) setup para os testes experimentais. FONTE: (LIM, 2014).

ao longo de duas direções ortogonais e estão unidos através do fio de ponto. É importante observar que no estado inicial os fios de trama e teia estão totalmente esticados.

Podemos verificar que na Figura 39 que, quando aplicado uma força de compressão no tecido, os fios de teias permaneceram esticados enquanto os fios de trama irá ondular entre os fios de teia. Portanto, ocorrerá uma contração do tecido no sentido dos fios de trama (direção  $x$ ). Após conseguir entender o funcionamento do modelo, os autores desenvolveram um método analítico para o cálculo do coeficiente de Poisson baseado nas relações observadas na Figura 40.

A função que descreve o coeficiente de Poisson encontrada por Ge, Hu e Liu (2013) é dada por

$$\nu = -\frac{2(r_1 + r_2)(\sin\theta - \theta\cos\theta) + l_1(\cos\theta - 1)}{2(r_1 + r_2)(\cos\theta + \theta\sin\theta - 1) - l_1\sin\theta}. \quad (5.3)$$

O próximo passo dos autores foi criar um modelo em elementos finitos para verificar como o coeficiente de Poisson variava de acordo com o deformação de compressão, e fizeram isso para diferentes valores de raios de fios da trama e da teia. Na figura 41 podemos verificar como os autores modelaram o problema em um software de elementos

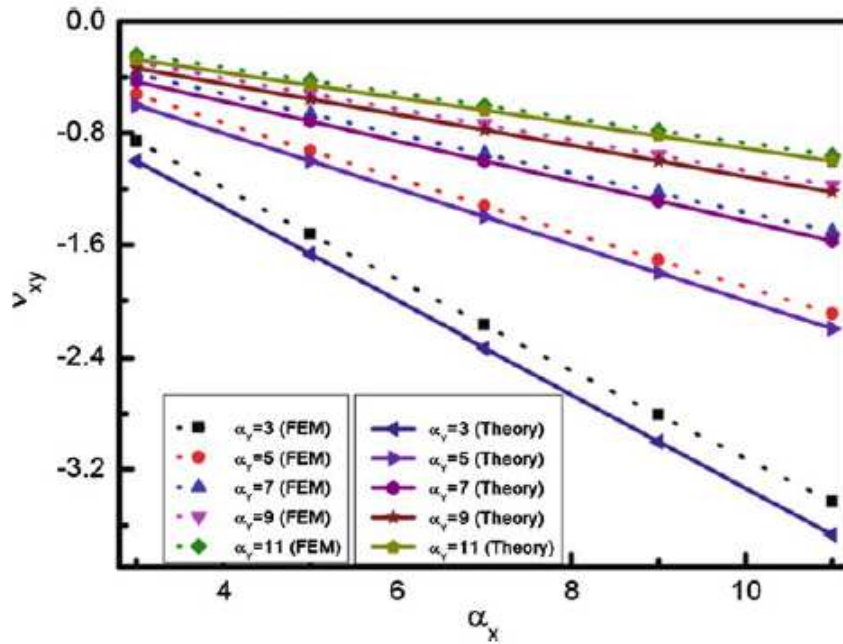


Figura 38: Comparação entre os dados experimentais e numéricos do modelo tetra-aquiral. FONTE: (LIM, 2014).

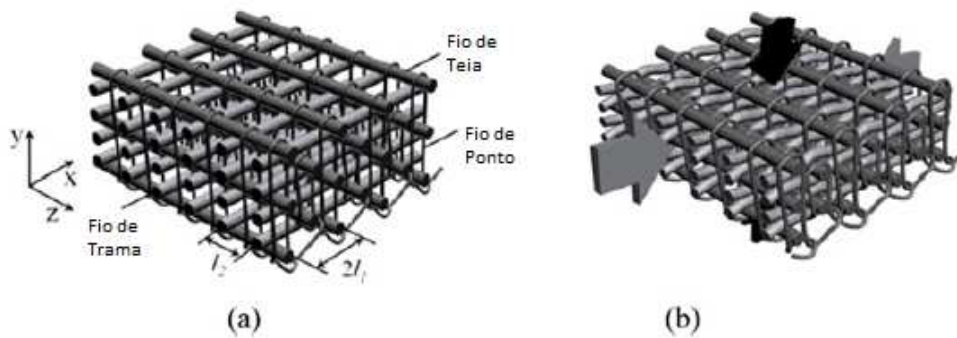


Figura 39: Modelo de um tecido que apresenta comportamento auxético. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013).

finitos.

Para validar o modelo os autores confeccionaram o tecido em um protótipo capaz de criar este tipo de tecido e fizeram um ensaio de compressão para ver como este tecido se comportava. Na Figura 42 podemos ver os resultados obtidos na análise analítica, experimental e numérica. Logo, podemos observar uma boa aproximação entre os resultados experimental e numérico.

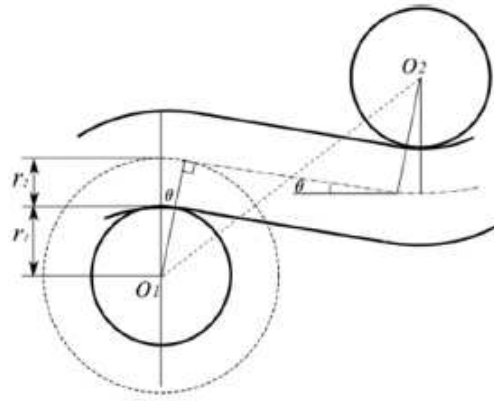


Figura 40: Geometria em 2D da estrutura em compressão. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013).

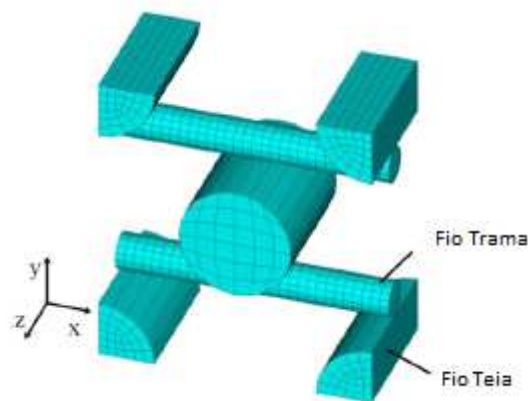


Figura 41: Modelo em elementos finitos do problema. FONTE:(GE; HU; LIU, 2013).

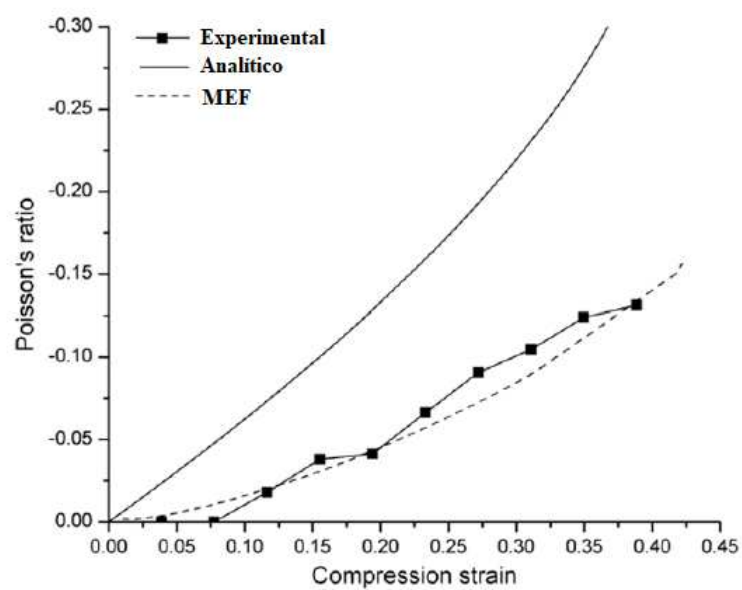


Figura 42: Relação do coeficiente de Poisson com a deformação em compressão para os dados analíticos, experimentais e numéricos. FONTE: (GE; HU; LIU, 2013).

## 6 ANÁLISE NUMÉRICA

A utilização de modelos para representar o comportamento microestrutural dos materiais auxéticos é uma prática que auxilia muito o desenvolvimento deste tipo de material, além de representar o comportamento microestrutural dos materiais auxéticos, os modelos estão sendo utilizados para fabricar colmeias, que são estruturas celulares em formato de prismas hexagonais que são fabricadas de modo a minimizar o material utilizado para garantir um menor custo e peso. Como foi visto na seção 2.2.1, o modelo hexagonal com reentradas é um dos modelos mais simples de estruturas de colmeias que apresentam um comportamento de coeficiente de Poisson negativo. Masters e Evans (1996) apresentam um modelo de cálculos de propriedades importantes como por exemplo módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, módulo de cisalhamento, etc. para diferentes tipos de colmeias hexagonais. Eles propõem um modelo matemático no qual será possível prever o que acontecerá com estas propriedades caso você mude a geometria da colmeia.

Em relação ao coeficiente de Poisson de uma colmeia hexagonal, Masters e Evans (1996) apresentam 3 diferentes equações para o coeficiente de Poisson para a estrutura, a primeira representando apenas o comportamento de flexão das hastes da estrutura, onde o coeficiente de Poisson é dado por

$$\nu_{12} = \frac{\sin \theta (\frac{h}{l} + \sin \theta)}{\cos^2 \theta}. \quad (6.1)$$

A segunda equação apresentada, leva em consideração que a estrutura se deforma apenas por alongamento das hastes na direção dos eixos sem mudar o ângulo, sendo assim o coeficiente de Poisson é

$$\nu_{21} = -\frac{\sin \theta}{\sin \theta + \frac{h}{l}}. \quad (6.2)$$

A terceira forma de representação leva em consideração a articulação dos encontros das hastes, ou seja, abrir e fechar as pernas podem influenciar no coeficiente de Poisson. A equação que representa o terceiro caso é dada por

$$\nu_{12} = \frac{-\sin \theta (\frac{h}{l} + \sin \theta)}{\frac{2h}{l} + \sin^2 \theta}. \quad (6.3)$$

Após apresentar as equações que descrevem como o coeficiente de Poisson se comporta em cada caso, eles propõe que é possível chegar a uma equação que descreve os três comportamentos simultaneamente. Fazendo a soma das deflexões na direção do carregamento, eles chegaram a equação geral 6.4.

$$\nu_{12} = \frac{-\sin(\theta) \cos(\theta) \left[ \frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_s} \right]}{\left( \frac{h}{l} + \sin(\theta) \right) \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{K_f \cos(\theta)} + \frac{\sin^2(\theta)}{K_h \cos(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{K_s} \right]}, \quad (6.4)$$

onde as contantes,  $K_f, K_h$  e  $K_s$  são contantes que dependem das propriedades mecânicas do material da estrutura da colmeia, seguindo as seguintes relações.

$$K_f = \frac{E_s b t^3}{l^3}; \quad (6.5)$$

$$K_s = \frac{E_s b t}{l}; \quad (6.6)$$

$$K_h = \frac{G_s b t}{l}. \quad (6.7)$$

Baseado no estudo de Masters e Evans (1996) o presente trabalho tem como objetivo criar um modelo numérico que irá calcular o coeficiente de Poisson de uma colmeia hexagonal com reentradas, levando em consideração as deformações direcionais obtidas por elementos finitos e com isso conseguir identificar o coeficiente de Poisson de diferentes colmeias hexagonais com reentradas.

## 6.1 METODOLOGIA

Para criar o modelo numérico será utilizado um software de elementos finitos para simular como a estrutura hexagonal com reentradas se comportará quando aplicada sobre ela uma deformação. Esta deformação será feita com a aplicação de uma força, após o programa realizar os cálculos ele retornará como resposta os deslocamentos direcionais no eixo da aplicação da força e no eixo transversal a aplicação da força. Estes dados serão tratados e então será calculado o coeficiente de Poisson da estrutura com base nessas respostas apresentada pelo software. Finalmente, a resposta do coeficiente de Poisson será comparado com a resposta teórica esperada pela equação de Masters e Evans (1996) sabendo assim, se o modelo numérico é valido para representar as colmeias hexagonais com reentradas.



### 6.1.1 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA

A geometria das colmeias hexagonais com reentradas foram desenvolvidas utilizando o software CAD Solidworks. Este programa permite ao usuário criar geometrias bidimensionais ou tridimensionais que irá auxiliar o projetistas no desenvolvimento e fabricação de novos produtos.

Para o desenvolvimento das colmeias utilizadas no trabalho foi feita uma pesquisa das dimensões das estruturas hexagonais disponíveis no mercado. Com base nestes dados desenvolveu-se colmeias hexagonais com reentradas com dimensões próximas a estas pesquisadas, pois estas colmeias já possuem métodos de fabricação bastantes eficazes que podem ser utilizadas no futuro como um ponto de partida para a fabricação de colmeias hexagonais com reentradas.

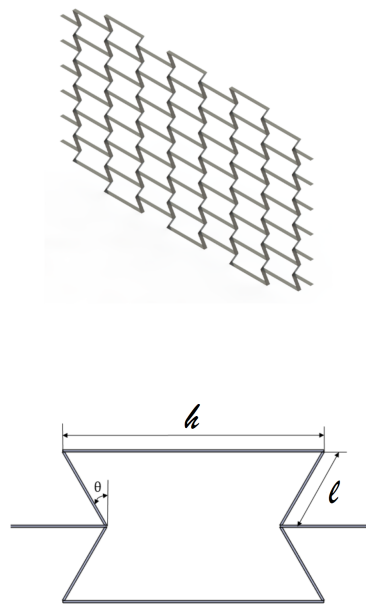


Figura 43: Superior: Vista isométrica da geometria de uma das colmeias analisadas. Inferior: Vista frontal da colmeia e identificação das variáveis analisadas.

Na Figura 43 podemos verificar como ficou a geometria da colmeia desenvolvida utilizando o software CAD. Na imagem superior, temos uma vista isométrica da geometria, e na inferior temos uma vista frontal de uma célula da colmeia, onde é possível identificar os parâmetros que foram alterados durante as simulações para verificar como o modelo numérico se compara ao modelo teórico de Masters e Evans (1996), onde,  $h$  é comprimento das hastes horizontais,  $l$  o comprimento das hastes diagonais e  $\theta$  o ângulo entre as hastes horizontais e diagonais.



Tabela 1: Valores de  $l, h$  e  $\theta$  utilizados nas simulações.

Colmeia	$l$	$h$	theta
Colmeia 1	20	120	-10
			-15
			-20
			-25
			-30
Colmeia 2	40	120	-10
			-15
			-20
			-25
			-30
Colmeia 3	60	120	-10
			-15
			-20
			-25
			-30
Colmeia 4	120	120	-10
			-15
			-20
			-25
			-30

Na Tabela 1 podemos verificar os valores adotados de  $l, h$  e  $\theta$  utilizados no trabalho para cada colmeia, para todas as colmeias foram utilizados o mesmo número de células .

Definida a geometria, o próximo passo é definir qual o material seria utilizado para construir a colmeia. Como os materiais utilizados para fabricação deste tipo de estruturas hexagonais são materiais leves e que possuem uma boa resistência mecânica, o material escolhido para a estrutura hexagonal com reentradas é a liga de alumínio comercial, que é de fácil acesso e bastante utilizada para fabricação de colmeias. Na Tabela 2 podemos verificar as propriedades mecânicas para este tipo de material.

Tabela 2: Propriedades mecânicas da liga de alumínio.

Propriedades	Valor
Módulo de Young (E)	$7,1e^{10}[Pa]$
Coefficiente de Poisson	0,33
Módulo de Cisalhamento (G)	$2,7e^{10}[Pa]$

### 6.1.2 DEFINIÇÃO DA SIMULAÇÃO

Para criar o modelo numérico, iremos utiliza uma ferramenta comercial de elementos finitos, o software que será utilizado é o ANSYS Student. Este software utiliza o método dos elementos finitos que consiste em discretizar a análise em vários elementos, cada elemento é formado por nós onde as equações diferenciais que descrevem o comportamento físico do problema é resolvido e as respostas apresentadas.

O tipo de análise que será utilizada para fazer a modelagem é uma análise estática estrutural. Esta análise determina os deslocamentos, tensões, deformações, e forças que estão atuando em uma estrutura causada pela aplicação de uma força inicial. Outra importante hipótese assumida na simulação é que as forças e respostas que atuam na estrutura variam lentamente em relação ao tempo.

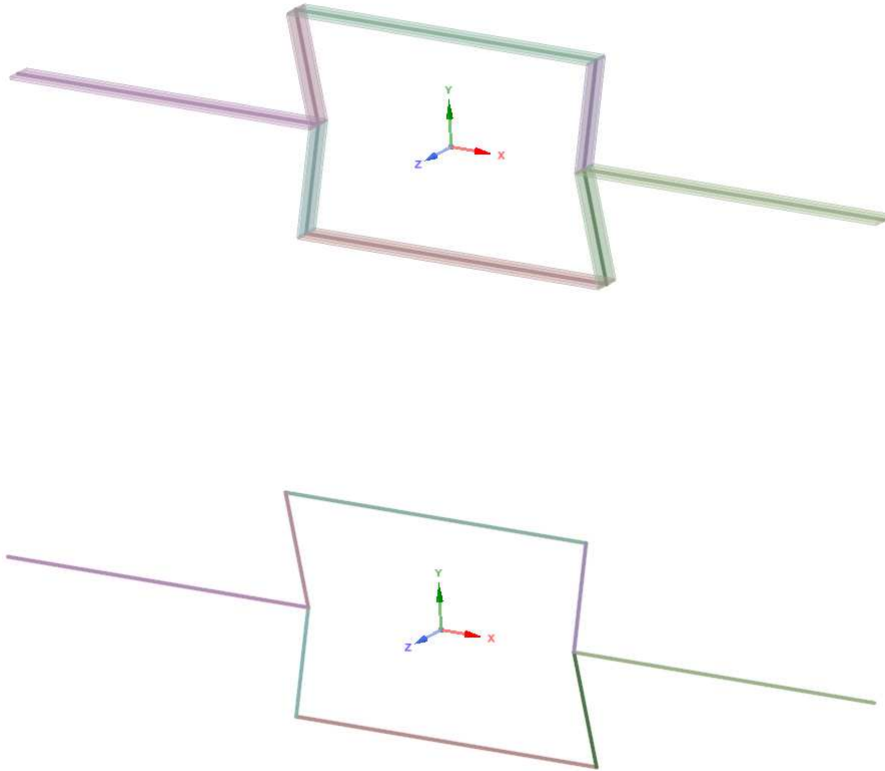


Figura 44: Idealização por elementos de viga utilizada para representação da geometria no software ANSYS.

Definido o tipo de simulação que será utilizada, agora temos de escolher a melhor maneira de representar a geometria, pois isto irá influenciar na qualidade e no tempo de resposta do problema. Podemos representar a geometria na forma de chapas, sólidos tridimensionais, etc.. Neste estudo representaremos a geometria como elementos de viga. Estes elementos cria uma idealização bidimensional de uma geometria tridimensional, e são utilizados pois simplificam a representação gerando resultados bastantes próximos da realidade com um custo computacional bem menor. Na Figura 44 podemos verificar a representação de uma célula da colmeia, na imagem superior a representação da geometria onde é possível ver a seção transversal, e na imagem inferior as linhas que representam a seção transversal do modelo.

Neste experimento a seção transversal de todas as colmeias foram mantidas constantes, pois desejava-se analisar como o coeficiente de Poisson numérico e teórico iria

variar apenas em relação aos termos especificados na seção 6.2.1.

### 6.1.3 MALHA

O método dos elementos finitos transforma um domínio contínuo em um domínio discreto, ou seja, representa um domínio com infinitas soluções desconhecidas em um domínio com um número limitado de elementos e que apresenta um comportamento conhecido.

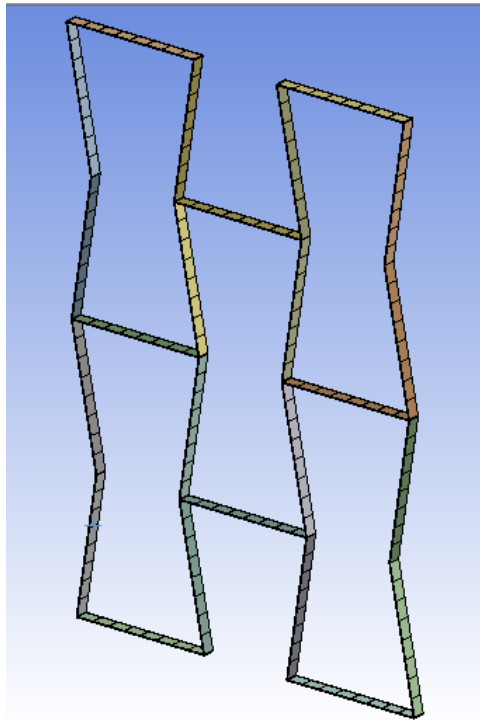


Figura 45: Vista da malha utilizada durante a simulação.

Neste tipo de abordagem os elementos são ligados entre si pelos nós e o conjunto de todos estes elementos e nós formando a malha da geometria, como pode ser observado na Figura 45. Neste estudo foi utilizada um tamanho de malha constante para todas as simulações, cujo tamanho médio da malha utilizada foi de 5 mm para todas as análises realizadas, que foi decidido através de um estudo de convergência de malha.

A convergência é uma metodologia que consiste em fazer uma análise com o menor número de nós possível e logo após analisa a resposta obtida. Então, aumenta-se o número de nós e compara a resposta obtida com a anterior, repete-se estes passos até a resposta convergir para um valor. Este método é muito utilizado pois permite obter uma boa solução utilizando uma malha com um bom número de nós e que não gere um alto custo computacional. Na Figura 46 podemos observar como ocorreu a convergência para uma das colmeias analisadas.

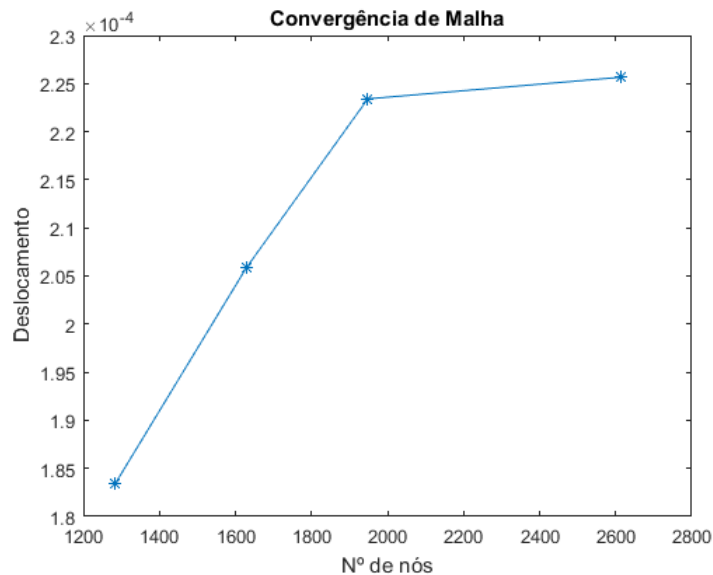


Figura 46: Gráfico convergência de malha.

#### 6.1.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Após definir a malha, o próximo passo é a configuração das condições de contorno. O objetivo do experimento é provocar um deslocamento na estrutura da colmeia e verificar se a estrutura hexagonal com reentradas apresenta um coeficiente de Poisson negativo, e se este coeficiente se aproxima daquele proposto pelas equações de Masters e Evans (1996). Para isso a extremidade da direita da colmeia foi fixada, restringindo todos os graus de liberdade, tanto para translação quanto para rotação, e na extremidade esquerda foi aplicada uma força distribuída. Na Figura 47 podemos verificar a condição de contorno aplicada em umas das colmeias analisadas.

A força escolhida para se adotar no experimento, foi uma que não iria causar uma deformação permanente na estrutura, ou seja, estaríamos trabalhando dentro da região elástica do material cujo a colmeia foi fabricada. Logo, a força adotada foi de 1 Newton.

#### 6.1.5 SOLUÇÃO

O último passo para realizar uma simulação utilizando o software ANSYS é definir quais respostas serão entregues no final dos cálculos realizados pelo programa. Existem diferentes resposta, como por exemplo o estado de tensão, campo de deformação, etc. Neste trabalho vamos utilizar a ferramenta de deslocamentos direcionais. Ela calcula os deslocamentos de uma estrutura em relação a um sistema de coordenadas global definido anteriormente. Na Figura 48 podemos verificar o sistema de referência utilizado. Na imagem superior é possível observar o deslocamento direcional em relação ao eixo  $X$  e na inferior podemos observar o deslocamento direcional em relação ao eixo  $Y$  de uma das colmeias analisadas.

A: Static Structural  
Figure  
Time: 1, s  
22/01/2019 14:32

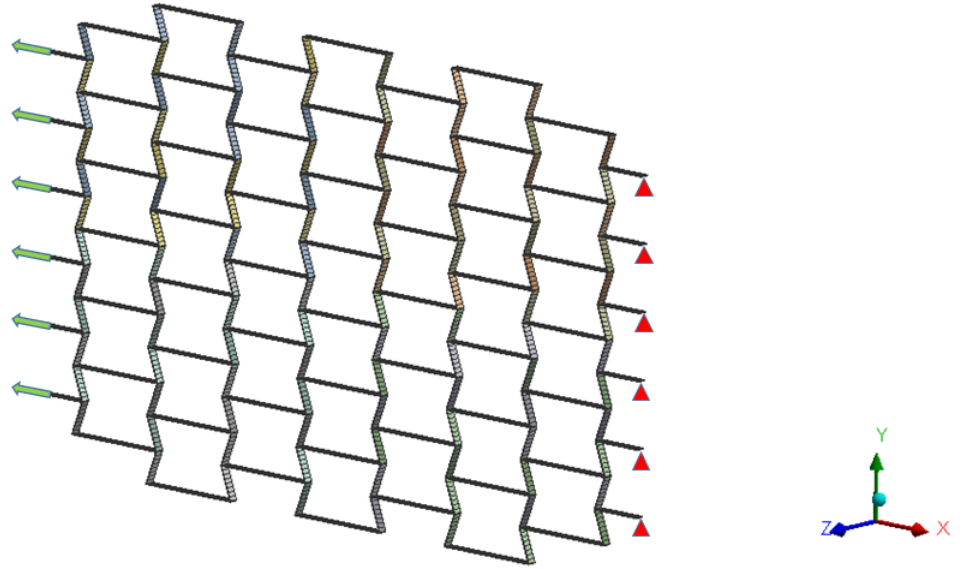


Figura 47: Condições de contorno adotada na simulação.

## 6.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definido as configurações das simulações, agora temos que analisar os resultados obtidos. Primeiramente foi criado uma maneira de calcular o coeficiente de Poisson de uma dada colmeia baseado nos deslocamentos direcionais obtidos nas simulações com o software ANSYS Student.

A deformação pode ser calculada como uma razão entre a variação de comprimento de uma estrutura e o seu comprimento inicial como podemos ver na Equação 6.8.

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x_i}{x_0}. \quad (6.8)$$

Nas simulações foram obtidos os deslocamentos direcionais em relação aos eixos  $X$  e  $Y$ . Logo, foi preciso calcular as deformações em relação a estes dois eixos separadamente. Calculado as deformações agora podemos calcular o coeficiente de Poisson numérico, pois sabemos que o coeficiente de Poisson da estrutura pode ser calculado pela razão entre a deformação na direção transversal à aplicação da força  $\varepsilon_y$  pela deformação na direção

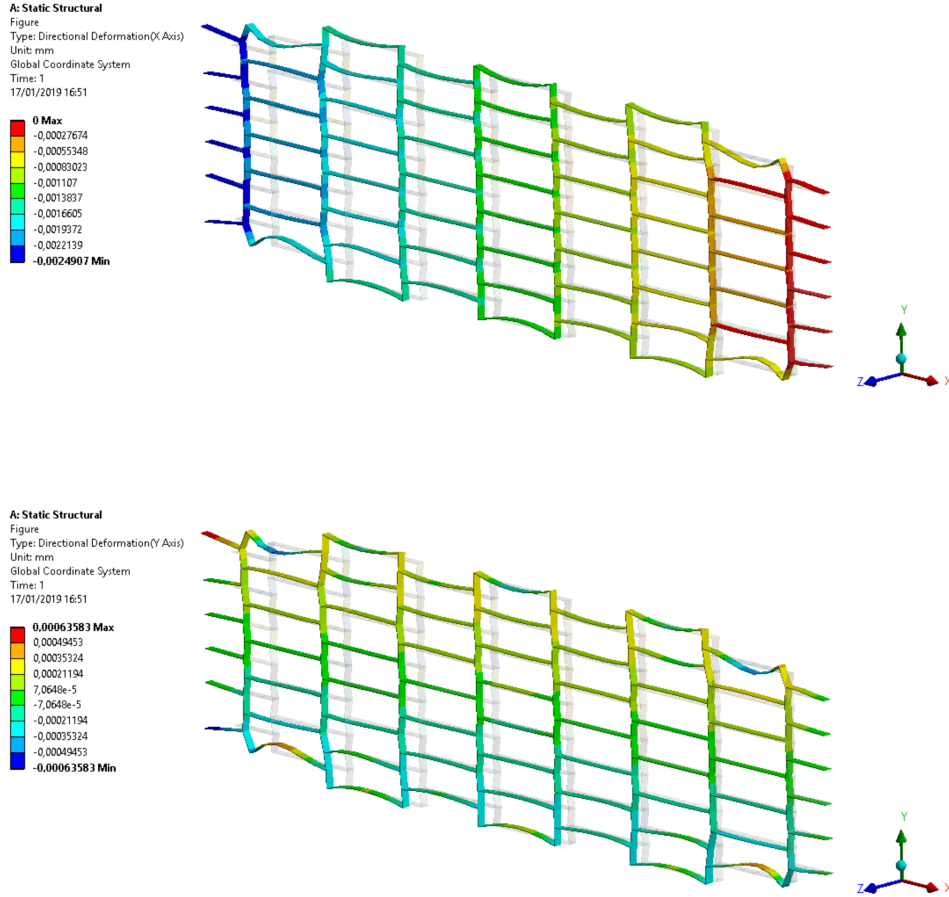


Figura 48: Demonstração dos deslocamentos direcionais.

longitudinal à aplicação da força  $\varepsilon_x$ , como podemos ver na Equação 6.9

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}. \quad (6.9)$$

### 6.2.1 COLMEIA 1

A primeira colmeia analisada tinha dimensões  $l = 20, h = 120$  e  $-10 \leq \theta \leq -30$ , na Figura 49 podemos observar os deslocamentos na direção do eixo  $X$  para um valor de  $\theta = -10$ , e no Apêndice A podemos observar os resultados de deslocamentos direcionais em  $X$  e  $Y$  para todos os valores de  $\theta$  da colmeia 1. Na Tabela 3 é apresentado os resultados onde, na primeira coluna temos os valores de  $\theta$  adotado para aquela colmeia, na segunda coluna é apresentado o coeficiente de Poisson calculado de acordo com a Equação 6.4 proposto por Masters e Evans (1996), na terceira e quarta colunas temos as dimensões iniciais da colmeia, tanto na direção  $X$   $x_0$  quanto na direção  $Y$   $y_0$ , na quinta e sexta coluna temos os deslocamentos direcionais observados nas simulações tanto em  $X$  ( $\Delta_x$ ) tanto em

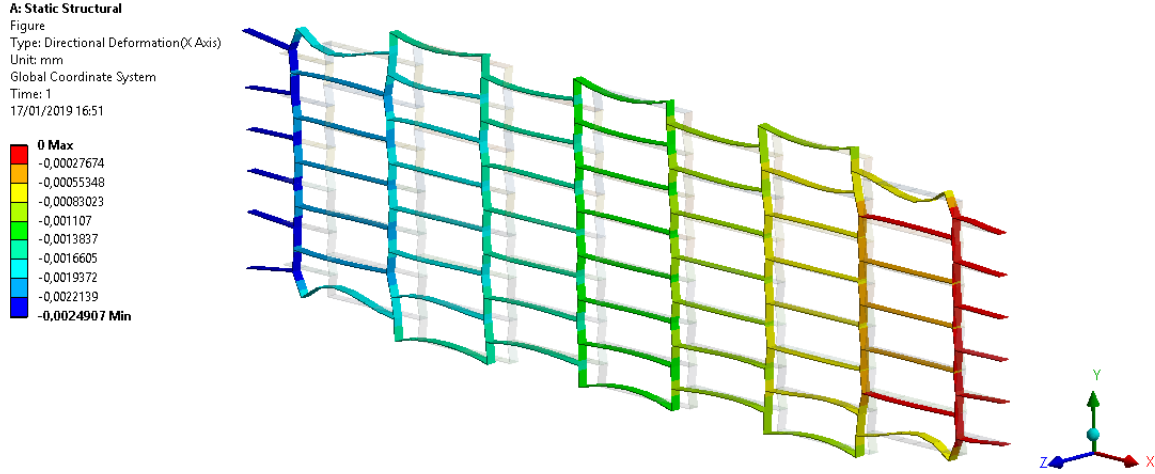


Figura 49: Campo de deslocamento direcional  $X$  obtido na simulação da colmeia 1.

$Y$  ( $\Delta_y$ ), nas sétima e oitava coluna temos as deformações em  $X$  e  $Y$  respectivamente calculadas de acordo com a Equação 6.8 e na última coluna o coeficiente de Poisson numérico calculado de acordo com a Equação 6.9.

Tabela 3: Resultados colmeia 1

$\theta$	$\nu_{teorico}$	$x_0$	$y_0$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\nu_{numerico}$
-10	-1,04	932	276	0,00249	0,00127	0,0000027	0,0000046	-1,72
-15	-1,59	919	270	0,00240	0,00149	0,0000026	0,0000055	-2,12
-20	-2,19	905	263	0,00227	0,00169	0,0000025	0,0000064	-2,56
-25	-2,87	892	254	0,00212	0,00185	0,0000024	0,0000073	-3,07
-30	-3,67	880	242	0,00194	0,00197	0,0000022	0,0000082	-3,71

Analisando os resultados obtidos, podemos perceber que para a configuração adotada com  $l = 20$  e  $h = 120$  produz uma estrutura com coeficiente de Poisson muito baixos chegando a um coeficiente de -3 para valores de  $\theta \leq -22$ . Em relação a modelagem, podemos observar pelo gráfico apresentado na Figura 50 que o coeficiente de Poisson numérico apresenta um erro em relação ao coeficiente de Poisson teórico proposto por Masters e Evans (1996), principalmente para valores de  $\theta \simeq -10$  e este erro vai diminuindo a medida que os valores de  $\theta$  diminuem em módulo.

## 6.2.2 COLMEIA 2

Para entender como as alterações na geometria iriam mudar o comportamento do coeficiente de Poisson para a segunda colmeia aumentamos o tamanho da dimensão  $l$ . Logo, a colmeia passou a ter dimensões  $l = 40$  e  $h = 120$  com  $\theta$  variando novamente de  $-10^\circ$  a  $-30^\circ$ . Na Tabela 4 podemos observar novamente os valores de coeficiente de Poisson teórico obtidos utilizando a equação 6.4, os valores de deslocamentos e deforma-

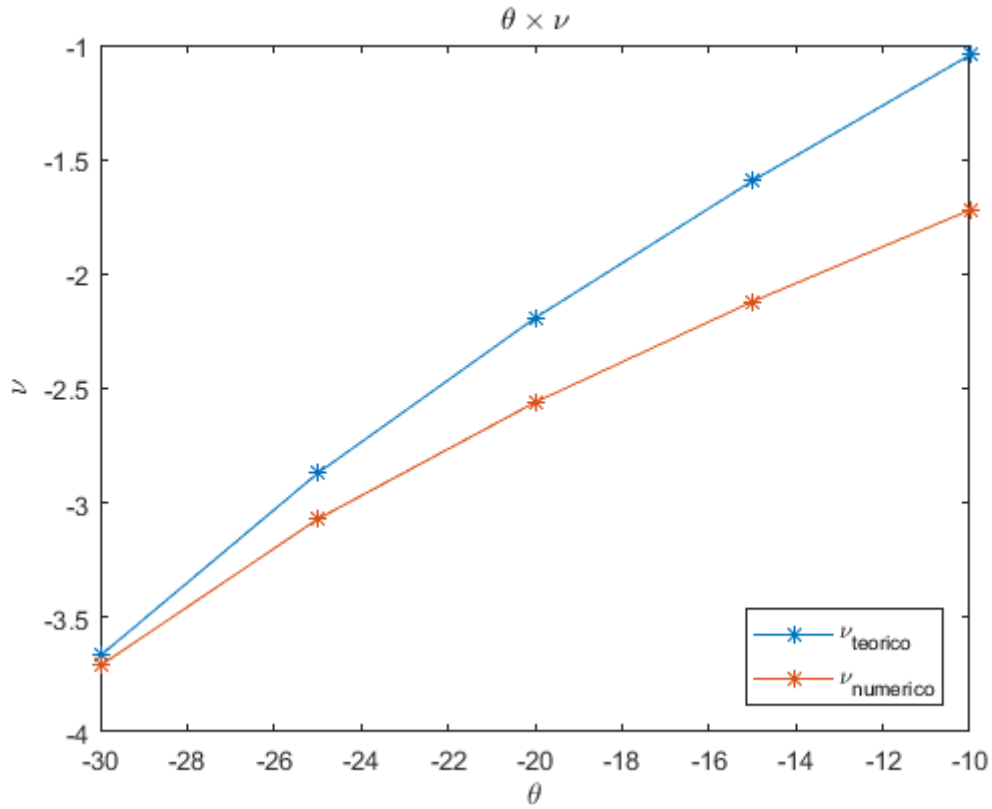


Figura 50: Gráfico relacionando ângulo  $\theta \times \nu_{teorico}$  e  $\theta \times \nu_{numerico}$  para colmeia 1.

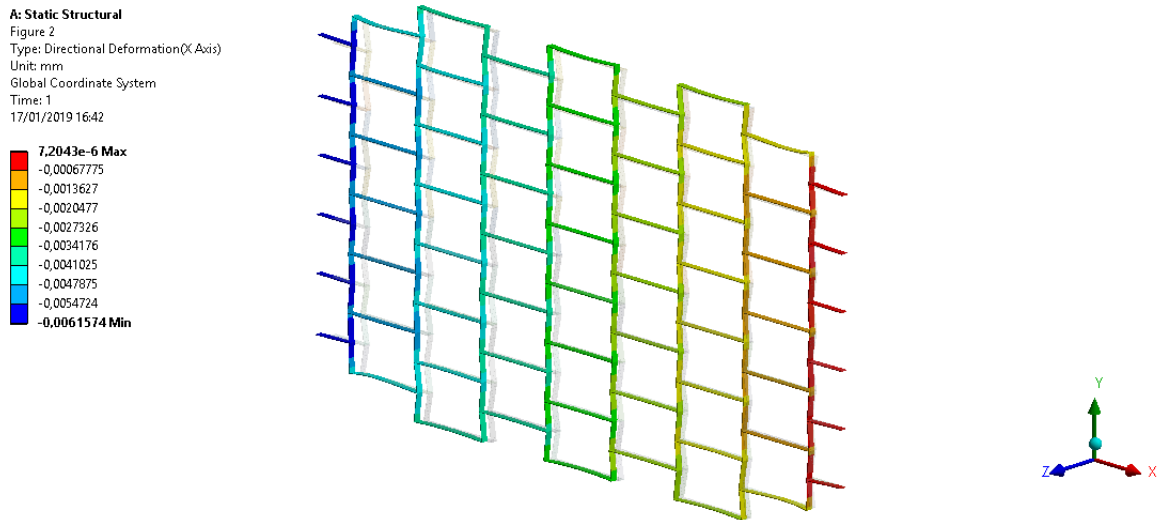


Figura 51: Campo de deslocamento direcional X obtido na simulação da colmeia 2.

ções direcionais retiradas das simulações numéricas e o valor do coeficiente de Poisson numérico calculado utilizando as deformações e a Equação 6.8.

Na Figura 51 podemos observar o campo de deslocamento na direção  $X$  obtidos através da simulação numérica, e no Apêndice B podemos observar os resultados obtidos para todos os valores de  $\theta$  nas direções  $X$  e  $Y$ .

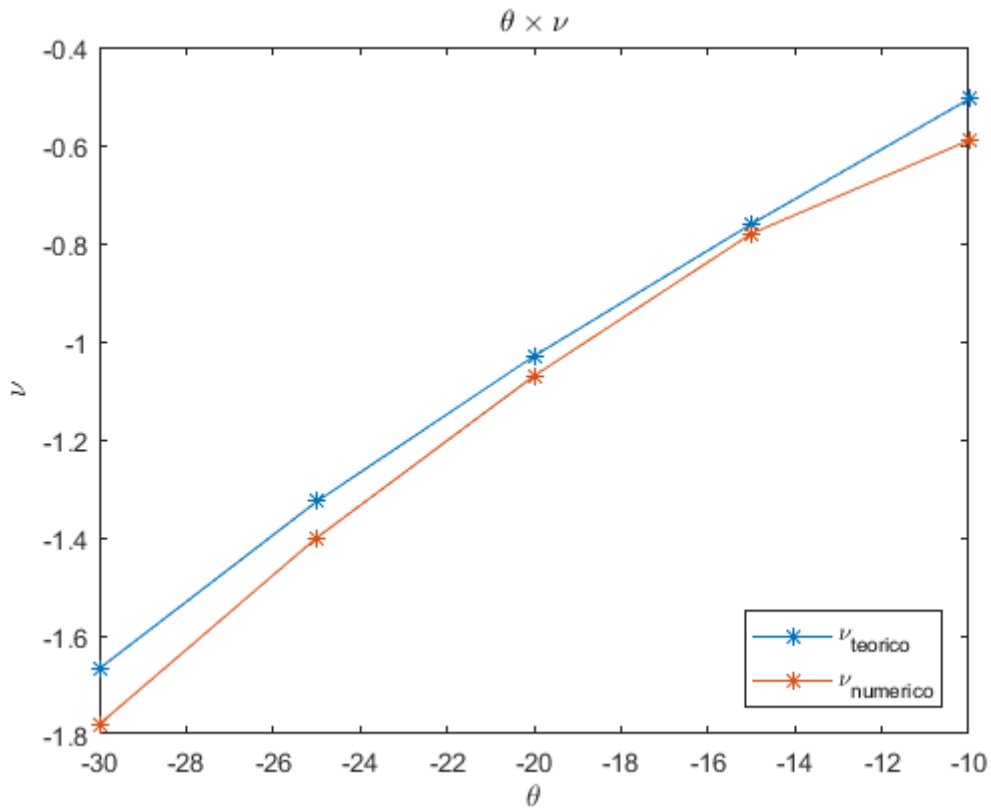
No gráfico da Figura 52 podemos comparar o que acontece com o coeficiente de



Tabela 4: Resultados obtidos na simulação da colmeia 2.

$\theta$	$\nu_{teorico}$	$x_0$	$y_0$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\nu_{numerico}$
-10	-0,51	904	551	0,00616	0,00220	0,0000068	0,0000040	-0,59
-15	-0,76	877	540	0,00590	0,00283	0,0000067	0,0000052	-0,78
-20	-1,03	850	526	0,00556	0,00368	0,0000065	0,0000070	-1,07
-25	-1,33	825	507	0,00514	0,00442	0,0000062	0,0000087	-1,40
-30	-1,67	800	485	0,00468	0,00505	0,0000058	0,0000104	-1,78

Poisson tanto teórico quanto numérico a medida que alteramos os valores de  $\theta$ , é possível observar que os valores Poisson se tornam menores a medida que você diminui o ângulo  $\theta$ , outro aspecto importante que podemos observar neste gráfico é que nesta configuração de geometria a diferença do coeficiente de Poisson teórico para o numérico é pequena.

Figura 52: Gráfico relacionando ângulo  $\theta \times \nu_{teorico}$  e  $\theta \times \nu_{numerico}$  para colmeia 2.

### 6.2.3 COLMEIA 3

Ao analisar a colmeia 2 pode-se observar que aumentar o comprimento da variável  $l = 20$  para  $l = 40$  fez com que a diferença entre o modelo numérico apresentado por este trabalho e o modelo numérico apresentado por Masters e Evans (1996) diminuísse. Logo, para a terceira colmeia foi decidido que iríamos aumentar novamente o valor de  $l$  e verificar como se comportaria a diferença do modelo numérico para o teórico. A colmeia 3 possui dimensões  $l = 60$  e  $h = 120$  com  $\theta$  variando de  $-10^\circ$  a  $-30^\circ$ .

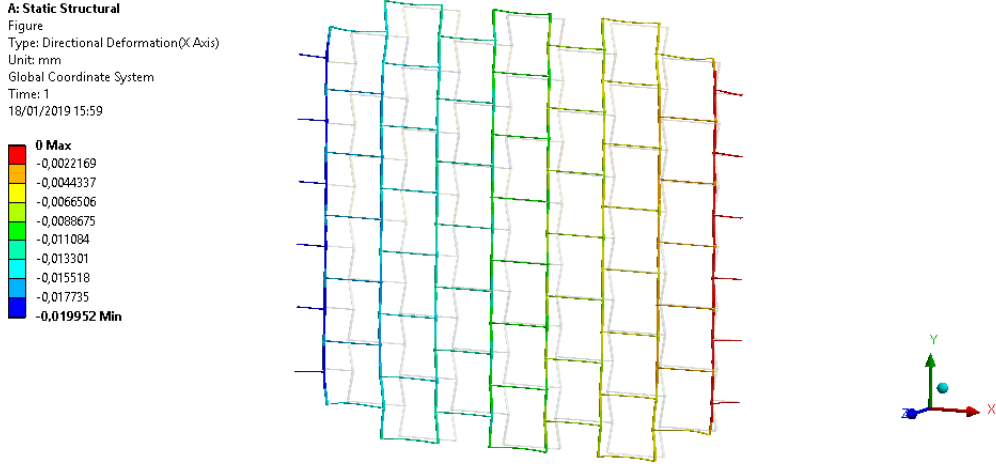


Figura 53: Campo de deslocamento direcional X obtido na simulação da colmeia 2.

Na Figura 53 podemos observar o campo de deslocamentos para a simulação da colmeia 3 para o ângulo de  $\theta = 1^\circ$ , e no Apêndice C podemos observar os resultados obtidos para os outros valores de  $\theta$  e os deslocamentos direcionais em  $Y$ . Na Tabela 5 podemos observar os valores de coeficiente de Poisson calculado utilizando a relação de Masters e Evans (1996) e os resultados obtidos nas simulações para todos os diferentes valores de  $\theta$  utilizado para a colmeia 3.

Tabela 5: Resultados Colmeia 3.

$\theta$	$\nu_{teorico}$	$x_0$	$y_0$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\nu_{numerico}$
-10	-0,33	877	827	0,01995	0,00642	0,0000228	0,0000078	-0,34
-15	-0,48	836	811	0,01898	0,00948	0,0000227	0,0000117	-0,51
-20	-0,64	796	789	0,05326	0,03719	0,0000669	0,0000471	-0,70
-25	-0,81	757	761	0,01632	0,01500	0,0000216	0,0000197	-0,91
-30	-1,00	720	727	0,01477	0,01718	0,0000205	0,0000236	-1,15

A Figura 54 novamente nos mostra um gráfico relacionando o coeficiente de Poisson numérico e teórico com o ângulo  $\theta$ . Analisando este gráfico é possível perceber que o modelo numérico e teórico se aproximam bastante para valores de  $\theta$  próximo a  $-10^\circ$  a medida que  $\theta$  vai diminuindo, o erro vai aumentando e a curva numérica começa a se distanciar dos resultados teóricos. Podemos perceber que aumentar os valores de  $l$  estão fazendo com que o coeficiente de Poisson aumente, mostrando que controlando a geometria podemos controlar o coeficiente de Poisson da maneira que desejamos.

## 6.2.4 COLMEIA 4

A última colmeia analisada onde se alterava apenas os fatores  $l$ , que é o comprimento das hastes diagonais da colmeia, foi a colmeia com  $l = 120$  e  $h = 120$  com  $\theta$  variando de  $-10^\circ$  a  $-25^\circ$ . No Apêndice D podemos observar os resultados obtidos nas

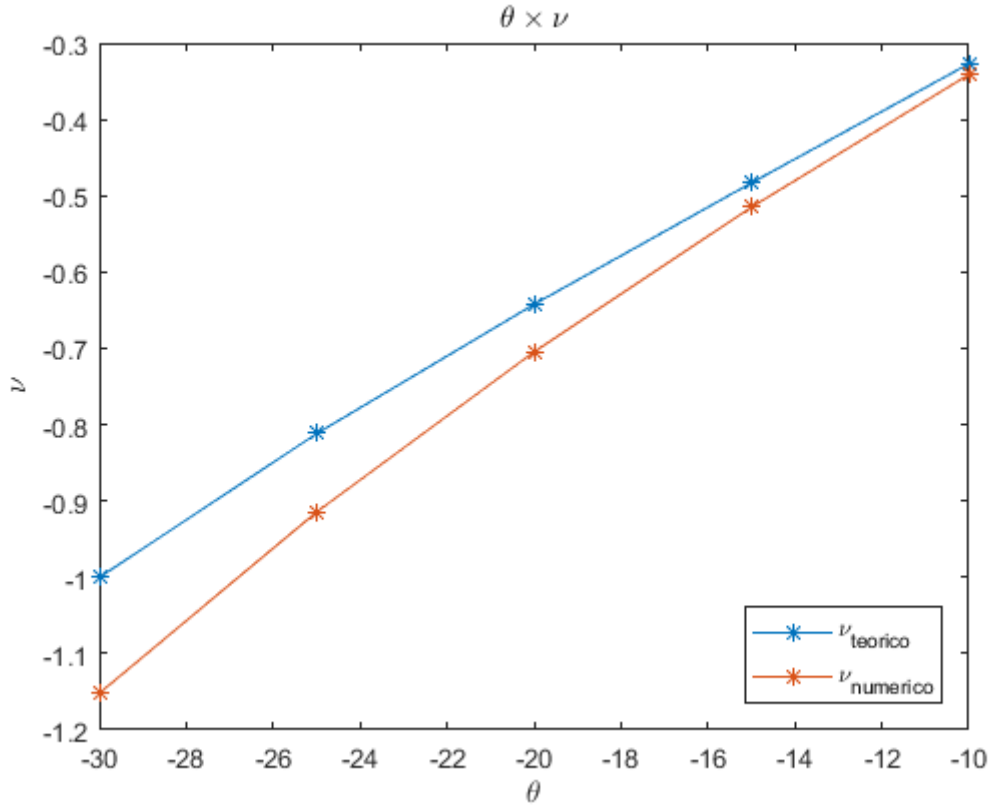


Figura 54: Gráfico relacionando ângulo  $\theta \times \nu_{teórico}$  e  $\theta \times \nu_{numérico}$  para colmeia 3.

simulações numéricas utilizando o software ANSYS, isto inclui campo de deslocamentos direcionais nas direções  $X$  e  $Y$  para todos os valores de  $\theta$  adotados.

Tabela 6: Resultados colmeia 4.

$\theta$	$\nu_{teórico}$	$x_0$	$y_0$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\nu_{numérico}$
-10	-0,15	793	1654	0,44192	0,15325	0,0005573	0,0000927	-0,17
-15	-0,21	711	1623	0,41194	0,23190	0,0005794	0,0001429	-0,25
-20	-0,25	632	1579	0,38072	0,30604	0,0006024	0,0001938	-0,32
-25	-0,30	554	1523	0,34750	0,37196	0,0006273	0,0002442	-0,39

Na Tabela 6 podemos observar os valores obtidos nas simulações e também o valor do coeficiente de Poisson para cada valor de  $\theta$  de acordo com a equação apresentada por Masters e Evans (1996). O gráfico da Figura 55 relaciona  $\theta$  em função dos coeficientes de Poisson teórico e numérico. Como podemos observar esta configuração de geometria resultou em coeficientes altos, ou seja, bem próximos de coeficientes positivos, também podemos observar que o erro entre o modelo numérico para esta geometria é grande e aumenta a medida que  $\theta$  fica menor.

## 6.2.5 ANÁLISE GERAL

Nos gráficos acima foram feitas análises onde se variava os valores dos ângulos  $\theta$  para cada colmeia que possui uma valor de  $l$  (dimensão da hastes diagonal da colmeia)

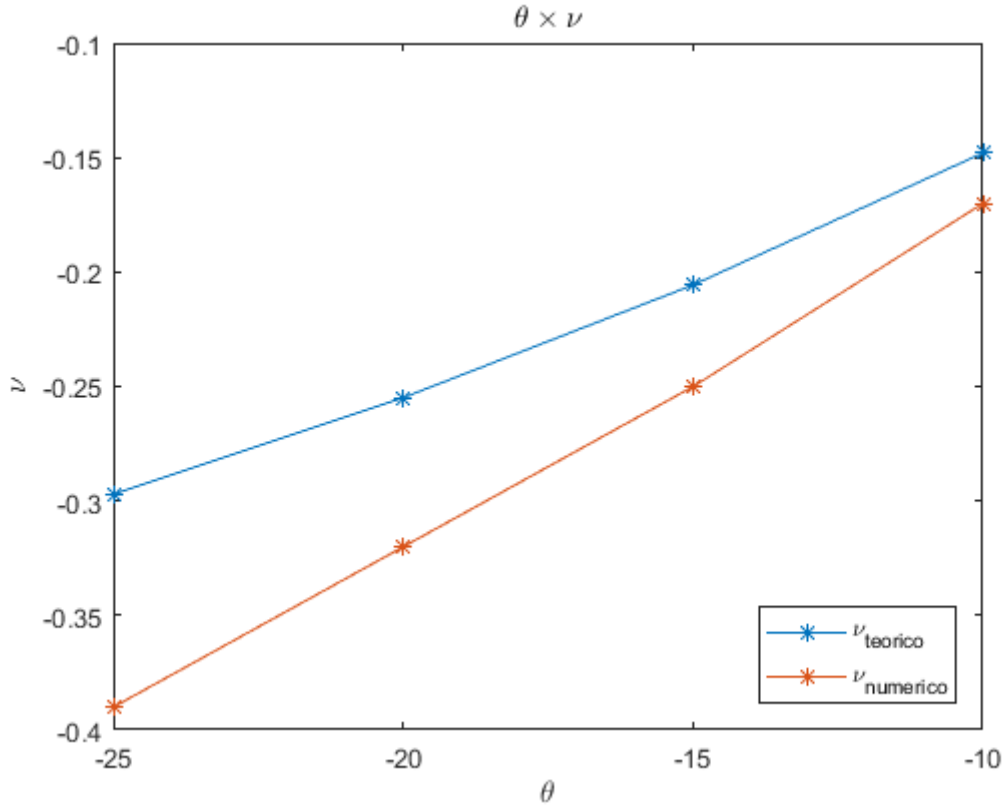


Figura 55: Gráfico relacionando ângulo  $\theta \times \nu_{teorico}$  e  $\theta \times \nu_{numerico}$  para colmeia 4.

diferente, este tipo de análise é útil para verificar o que acontece com a colmeia com as dimensões de  $l$  e  $h$  constantes e variamos  $\theta$ , mas não possibilita uma boa análise do que está acontecendo com o coeficiente de Poisson a medida que a dimensão  $l$  varia. Na Figura 56 podemos observar um gráfico que relaciona os coeficientes de Poisson teórico e numérico com a dimensão  $l$ . Analisando o gráfico podemos perceber que a medida que  $l$  aumenta o valor do coeficiente de Poisson diminui, podemos perceber também que a diferença entre os resultados teóricos e numéricos diminuem a medida que  $l$  aumenta.

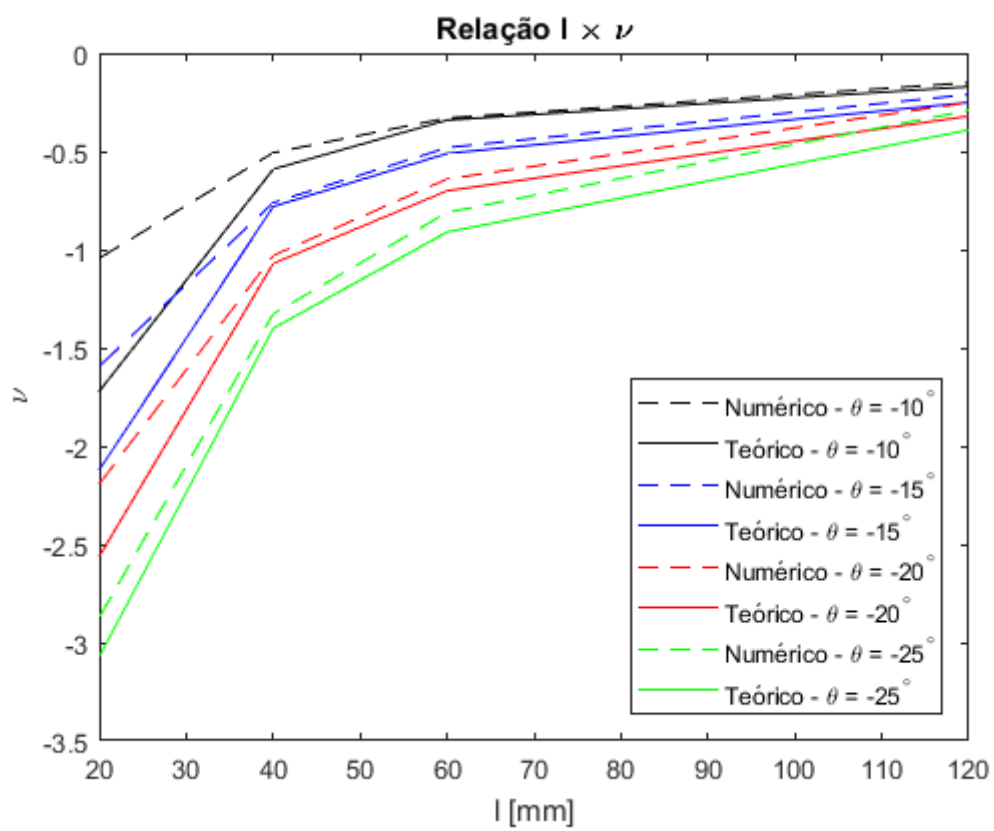


Figura 56: Gráfico relacionando  $l \times \nu_{teorico}$  e  $l \times \nu_{numerico}$ .

## 7 CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Em um mundo contemporâneo a busca por competitividade e inovação torna a pesquisa por novos materiais e métodos uma importante ferramenta de desenvolvimento tecnológico. Novos materiais e ligas são descobertos ao passar dos anos trazendo melhorias na eficiência dos processos e contribuem para o desenvolvimento humano, um exemplo é o caso dos materiais auxéticos que são aqueles que apresentam coeficiente de Poisson negativo, ou seja, expande-se transversalmente quando são tracionados.

As pesquisas em relação a este tipo de material que apresentam coeficiente de Poisson negativo é nova e ainda há bastante espaço para desenvolvimento. As principais pesquisas focam seus esforços no desenvolvimento de materiais artificiais, ou seja, no desenvolvimento de estruturas que são desenvolvidas por pesquisadores para apresentar este comportamento. Neste trabalhos pode-se observar alguns destes estudos entre eles de colmeias, espumas, tecidos e chapas que veem crescendo para contribuir para o desenvolvimento deste tipo de material e inovação tecnológica.

A utilização de métodos numéricos para criar modelos que descrevem o comportamento de estruturas que apresentam o comportamento de Poisson negativo estão sendo muito utilizadas, estes modelos ajudam bastante no desenvolvimento destes materiais uma vez que obtêm-se respostas muito mais rápido e com um custo bem menor. Neste trabalho foi apresentado um modelo para representar o comportamento das colmeias hexagonais com reentradas apresentado por Masters e Evans (1996). O estudo buscava criar um modelo numérico que se aproximasse do modelo teórico apresentado pelo Masters e Evans (1996), além de verificar como a alteração na geometria de uma colmeia hexagonal com reentradas iria influenciar no coeficiente de Poisson da estrutura.

Pode-se observar que o modelo numérico tende a apresentar resultados proximos ao esperado mas, para algumas configurações de colmeias, observa-se pequenos erros. Mesmo apresentando erros, o estudo possibilitou observar o que acontecia com o coeficiente de Poisson quando alterávamos a geometria da colmeia hexagonal com reentradas, a primeira análise que foi feita foi como o ângulo entre as hastes horizontais e diagonais da colmeia influenciavam no Poisson, pode-se observar que quanto menor o valor de  $\theta$  menor será o coeficiente de Poisson; a segunda análise buscou observar o que acontecia quando se mantinha constante as dimensões  $h$  (que é o comprimento das hastes horizontais da colmeia) e  $\theta$  constantes e alterava apenas a dimensão  $l$  (que é o comprimento das hastes diagonais

da colmeia), verificou-se que o coeficiente de Poisson da estrutura aumentava a medida que aumentávamos o tamanho da dimensão  $l$ .

Era esperado que o modelo numérico apresentasse algum erro em relação ao modelo teórico, pois métodos numéricos propagam erros na sua solução. Mas a análise mostrou que estes erros em algumas simulações distorciam muito o valor do coeficiente de Poisson, logo eles estavam sendo causados por alguma outra razão e não só pelo erro do método numérico. Analisando o trabalho podemos dizer sugerir as seguintes hipóteses para o aparecimento destes erros:

- A utilização da simplificação do modelo utilizando os elementos de viga para descrever a geometria pode estar errada e não descrever o fenômeno corretamente;
- As condições de contorno adotadas podem estar gerando uma rigidez adicional a estrutura que não exista de fato.

Sendo assim, no futuro pode-se desenvolver trabalhos que irão verificar se estas são as causas que diferencia os dois modelos. Sugere-se:

- A adoção de outra tecnica de modelagem implementada no ANSYS para descrever a geometria, além de elemento de viga;
- A verificação da condição de contorno adotada ou a adoção de uma nova condição de contorno a fim de descrever melhor as condições de contorno do modelo numérico;
- Utilizar a plataforma APDL do ANSYS para criar um rotina que descreva o problema bidimensionalmente utilizando novas condições de contorno.

# Referências

- ALDERSON, A.; ALDERSON, K. Auxetic materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 221, n. 4, p. 565–575, 2007. Citado 2 vezes nas páginas v e 4.
- ASHBY, L. J. G. M. F. *Cellular Solids*. second. [S.l.]: Cambridge University Press, 1977. Citado 3 vezes nas páginas v, 9 e 10.
- BLATZ, P. J.; KO, W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, SOR, v. 6, n. 1, p. 223–252, 1962. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- CAUCHY, A.-L. Exercices de mathématiques (vol. 2). *Paris: de Bure Frères. Google Scholar*, 1827. Citado na página 2.
- CHAN, N.; EVANS, K. Fabrication methods for auxetic foams. *Journal of Materials Science*, Springer, v. 32, n. 22, p. 5945–5953, 1997. Citado na página 5.
- CHEN, Y. et al. Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 50, n. 6, p. 996–1004, 2013. Citado na página 43.
- CHOI, J.; LAKES, R. Non-linear properties of polymer cellular materials with a negative poisson's ratio. *Journal of Materials Science*, Springer, v. 27, n. 17, p. 4678–4684, 1992. Citado na página 23.
- CIAMBELLA, J.; SACCOMANDI, G. A continuum hyperelastic model for auxetic materials. *Proc. R. Soc. A*, The Royal Society, v. 470, n. 2163, p. 20130691, 2014. Citado 3 vezes nas páginas v, 23 e 24.
- CRITCHLEY, R. et al. A review of the manufacture, mechanical properties and potential applications of auxetic foams. *physica status solidi (b)*, Wiley Online Library, v. 250, n. 10, p. 1963–1982, 2013. Citado na página 5.
- FILHO, A. A. *Elementos finitos: a base da tecnologia CAE*. [S.l.]: Editora Érica, 2008. Citado 13 vezes nas páginas vi, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37 e 38.
- GE, Z.; HU, H.; LIU, Y. A finite element analysis of a 3d auxetic textile structure for composite reinforcement. *Smart materials and structures*, IOP Publishing, v. 22, n. 8, p. 084005, 2013. Citado 6 vezes nas páginas vi, vii, 43, 44, 45 e 46.
- GRIMA, J. N.; EVANS, K. E. Auxetic behavior from rotating triangles. *Journal of materials science*, Springer, v. 41, n. 10, p. 3193–3196, 2006. Citado 3 vezes nas páginas v, 15 e 41.



- HE, C.; LIU, P.; GRIFFIN, A. C. Toward negative poisson ratio polymers through molecular design. *Macromolecules*, ACS Publications, v. 31, n. 9, p. 3145–3147, 1998. Citado na página 5.
- LAKES, R. Foam structures with a negative poisson's ratio. *Science*, JSTOR, p. 1038–1040, 1987. Citado na página 5.
- LEKHNITSKII, S. et al. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. *Physics Today*, v. 17, p. 84, 1964. Citado na página 18.
- LIM, T. cheng. *Auxetic Materials and Structures*. Singapore: Springer, 2014. Citado 14 vezes nas páginas v, vi, 2, 3, 5, 6, 14, 15, 20, 23, 42, 43, 44 e 45.
- LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2013. Citado na página 17.
- MASTERS, I.; EVANS, K. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite structures*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 403–422, 1996. Citado 13 vezes nas páginas v, 7, 9, 47, 48, 49, 53, 55, 56, 58, 59, 60 e 63.
- PICKLES, A. et al. The effect of the processing parameters on the fabrication of auxetic polyethylene. *Journal of materials science*, Springer, v. 30, n. 16, p. 4059–4068, 1995. Citado na página 5.
- POISSON, S. Note sur l'extension des fils et des plaques élastiques. In: *Annales de Chimie et de Physique*. [S.l.: s.n.], 1827. v. 36, p. 384–387. Citado na página 2.
- SAINT-VENANT, A. *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Paris: Premiere Section, 1848. Citado na página 3.
- SMITH, C. W.; GRIMA, J.; EVANS, K. A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: missing rib foam model. *Acta materialia*, Elsevier, v. 48, n. 17, p. 4349–4356, 2000. Citado 5 vezes nas páginas v, 11, 12, 13 e 14.
- TAYLOR, M. et al. Low porosity metallic periodic structures with negative poisson's ratio. *Advanced Materials*, Wiley Online Library, v. 26, n. 15, p. 2365–2370, 2014. Citado 3 vezes nas páginas vi, 41 e 42.
- YOUNG, T. *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts: In Two Volumes*. [S.l.]: Johnson, 1807. v. 2. Citado na página 2.

## Apêndices

# A Apêndice A - Simulação Colmeia

## 1

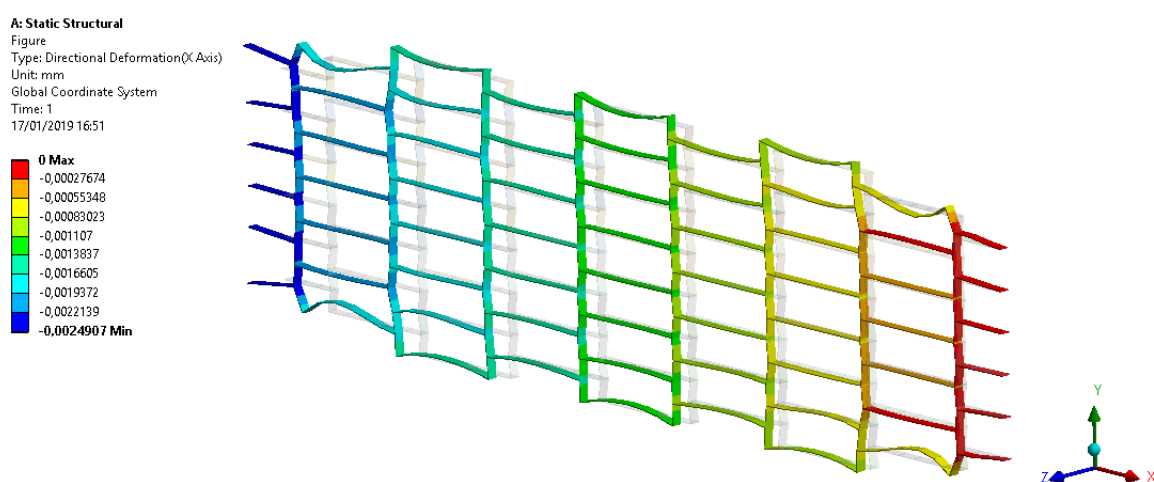


Figura 57: Campo deslocamento na direção X Colmeia 1 e  $\theta = -10^\circ$ .

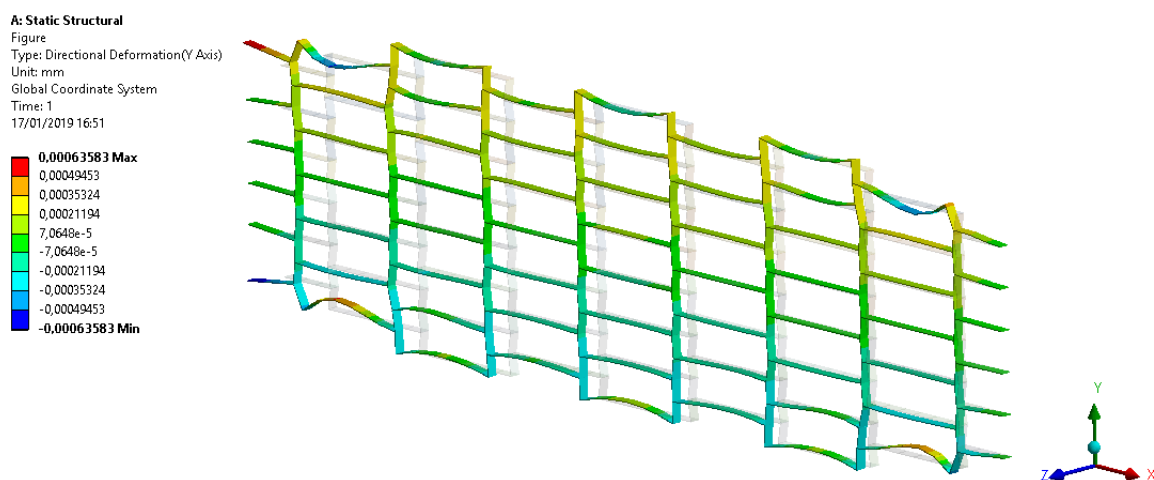


Figura 58: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 1 e  $\theta = -10^\circ$ .

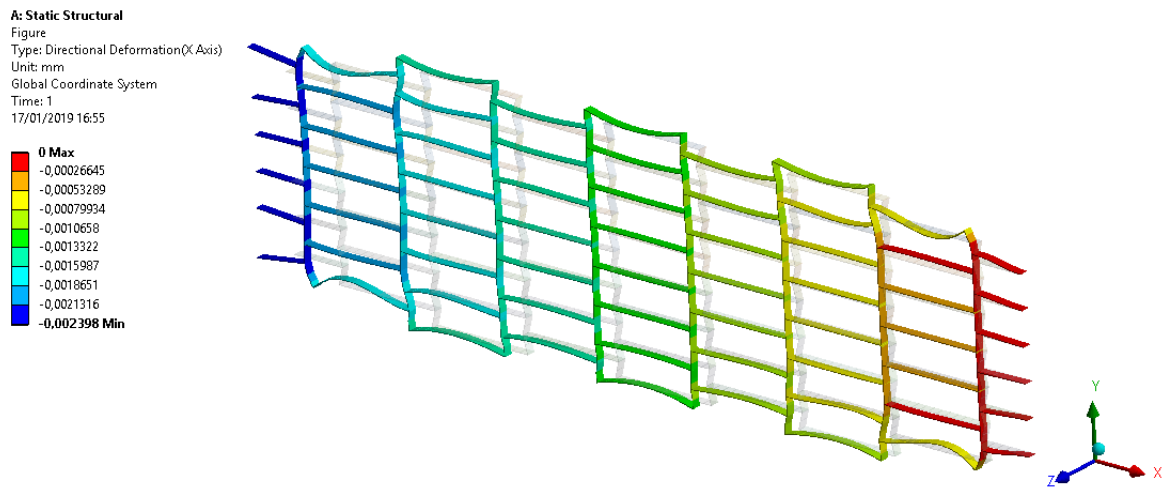


Figura 59: Campo deslocamento na direção X Colmeia 1 e  $\theta = -15^\circ$ .

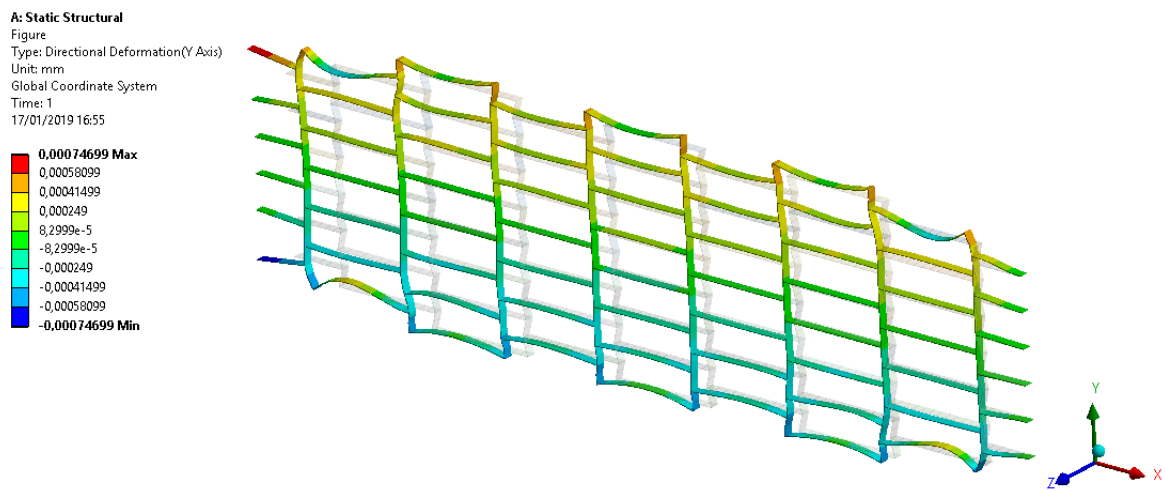


Figura 60: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 1 e  $\theta = -15^\circ$ .

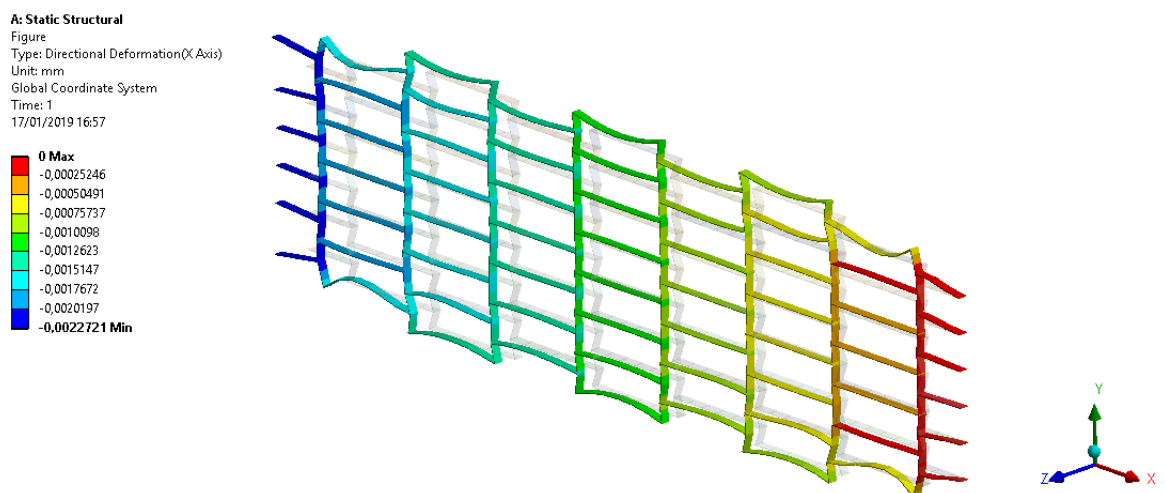


Figura 61: Campo deslocamento na direção X Colmeia 1 e  $\theta = -20^\circ$ .

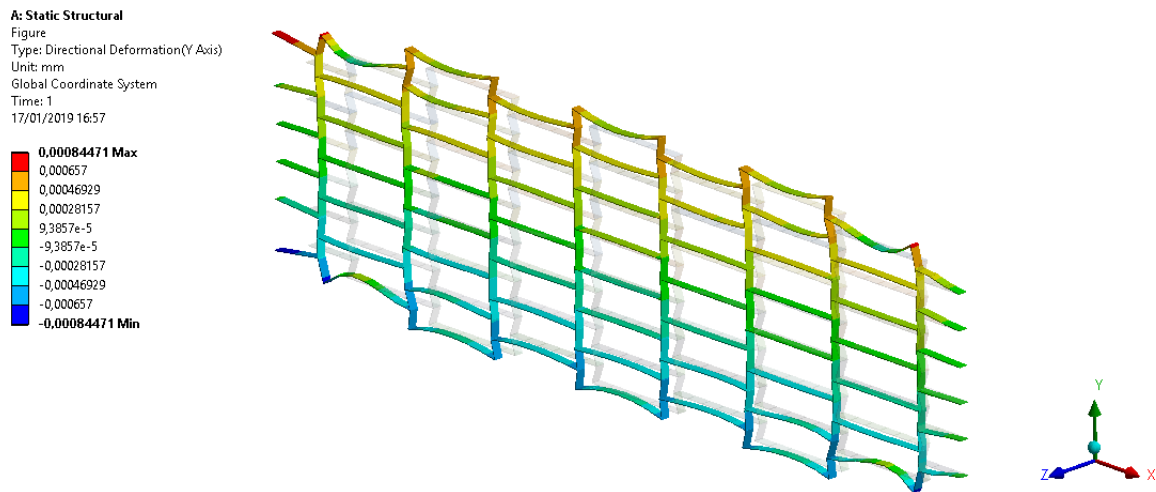


Figura 62: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 1 e  $\theta = -20^\circ$ .

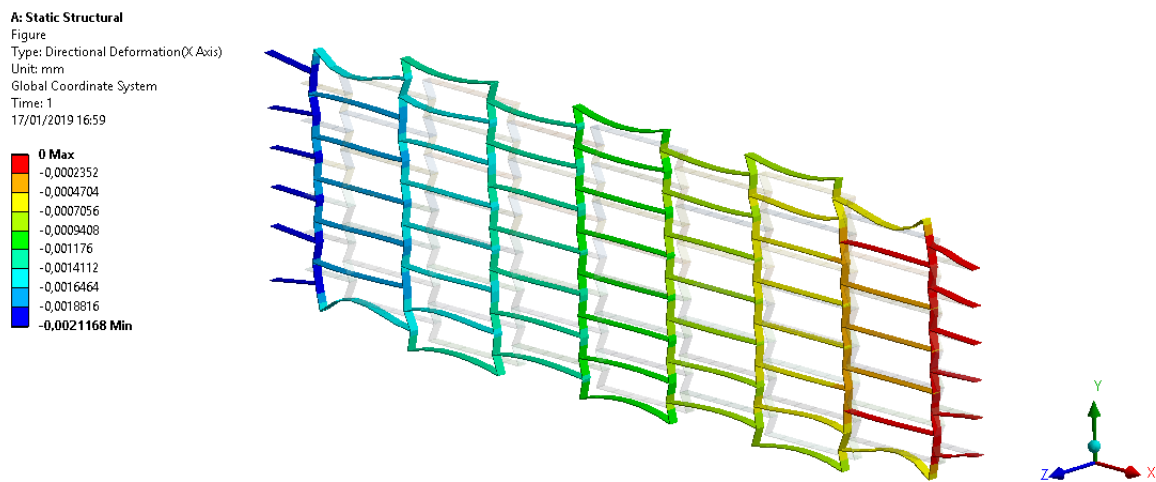


Figura 63: Campo deslocamento na direção X Colmeia 1 e  $\theta = -25^\circ$ .

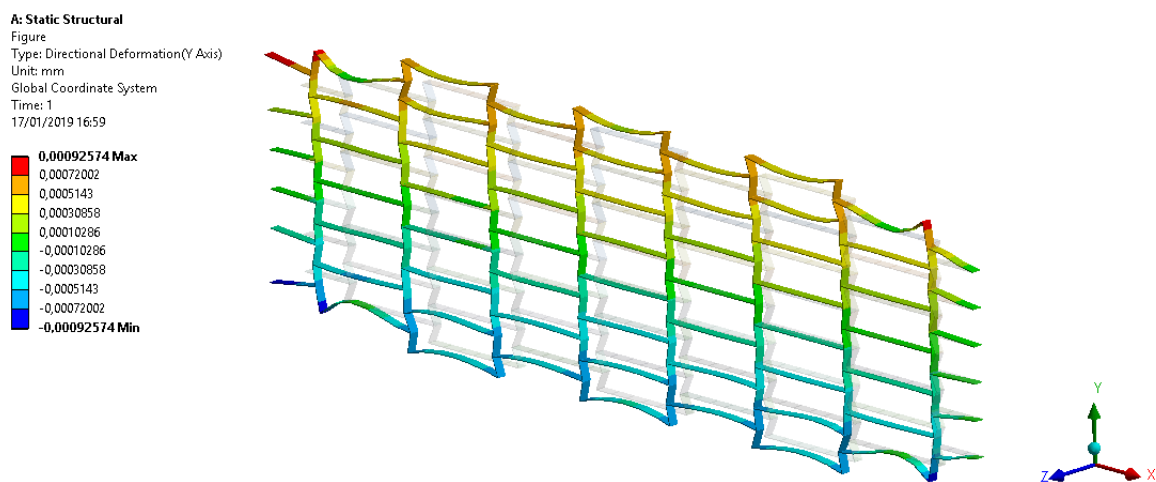


Figura 64: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 1 e  $\theta = -25^\circ$ .

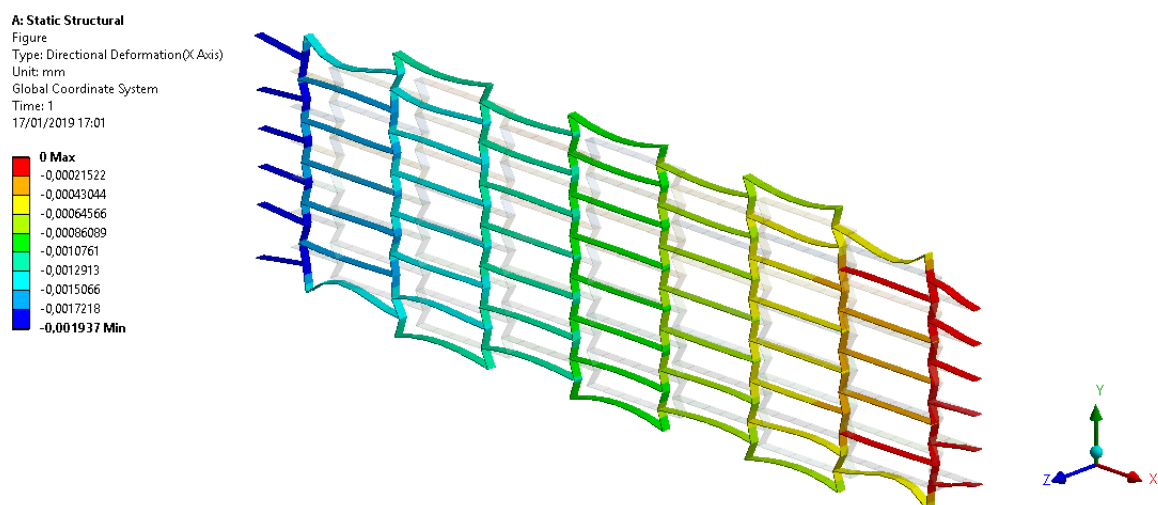


Figura 65: Campo deslocamento na direção X Colmeia 1 e  $\theta = -30^\circ$ .

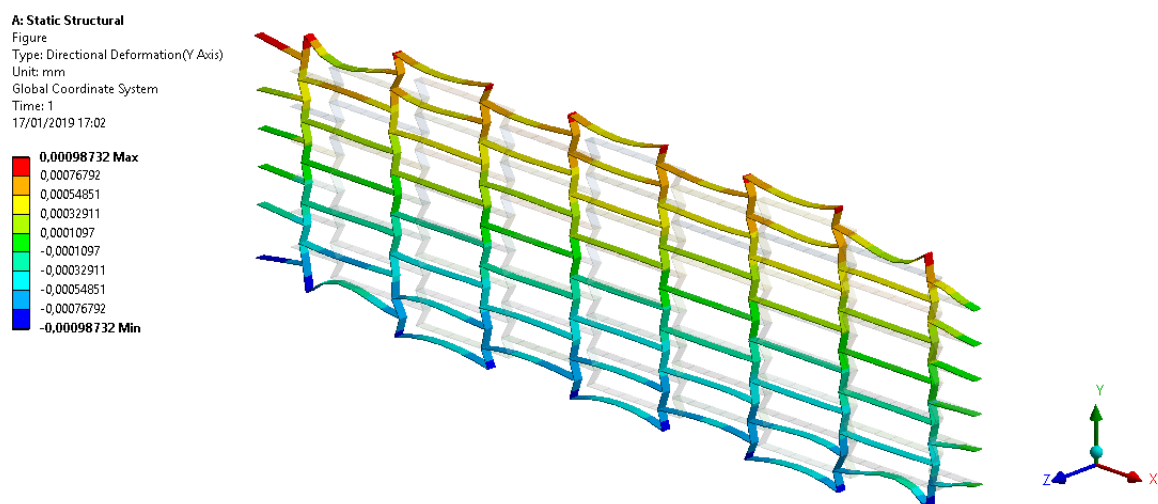


Figura 66: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 1 e  $\theta = -30^\circ$ .

# B Apêndice B - Simulação Colmeia

## 2

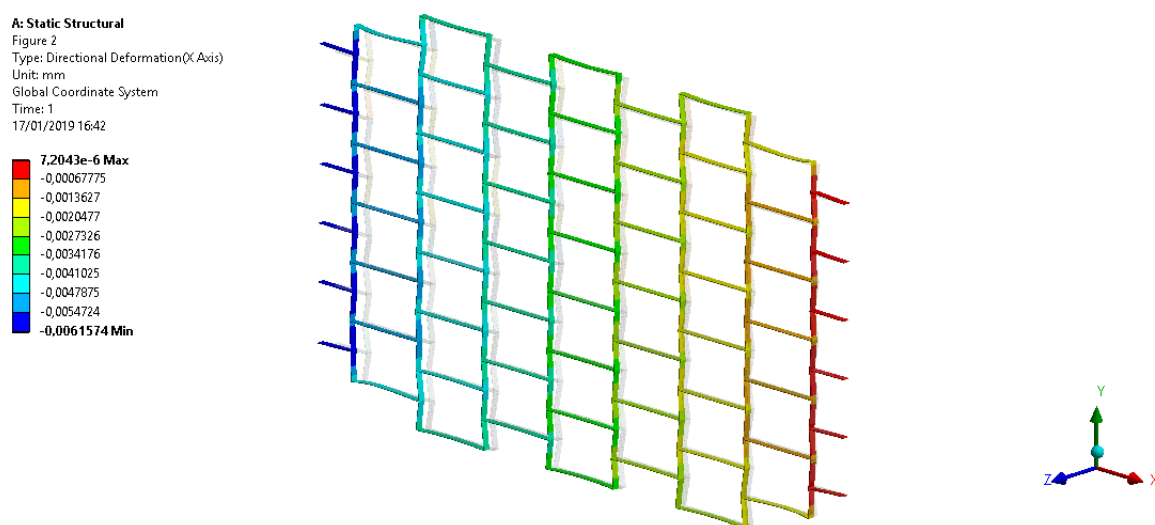


Figura 67: Campo deslocamento na direção X Colmeia 2 e  $\theta = -10^\circ$ .

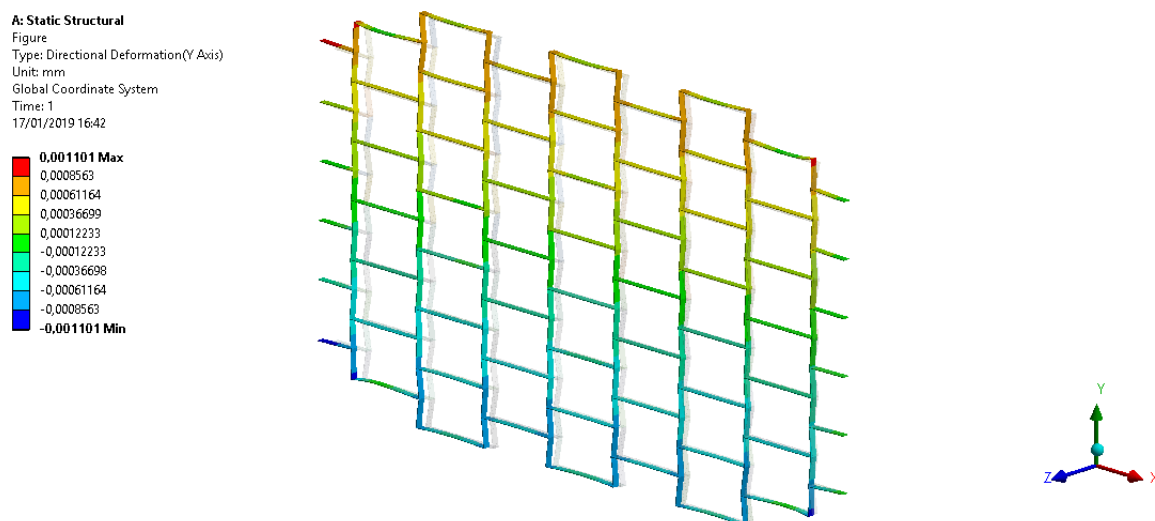


Figura 68: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -10^\circ$ .

**B: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(X Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 17/01/2019 16:44

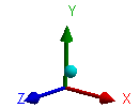
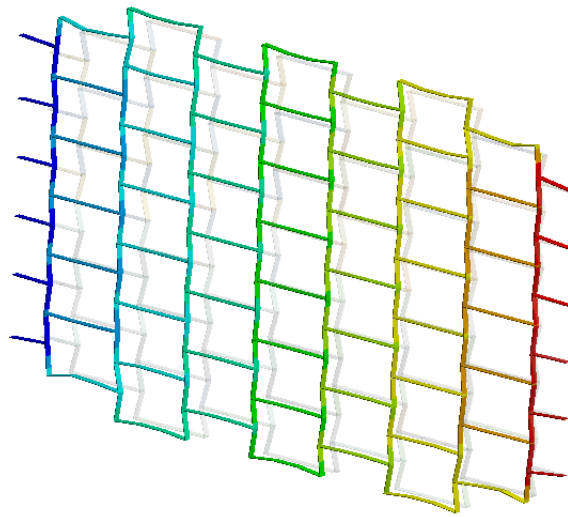
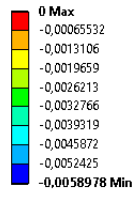


Figura 69: Campo deslocamento na direção X Colmeia 2 e  $\theta = -15^\circ$ .

**B: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(Y Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 17/01/2019 16:44

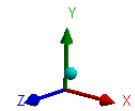
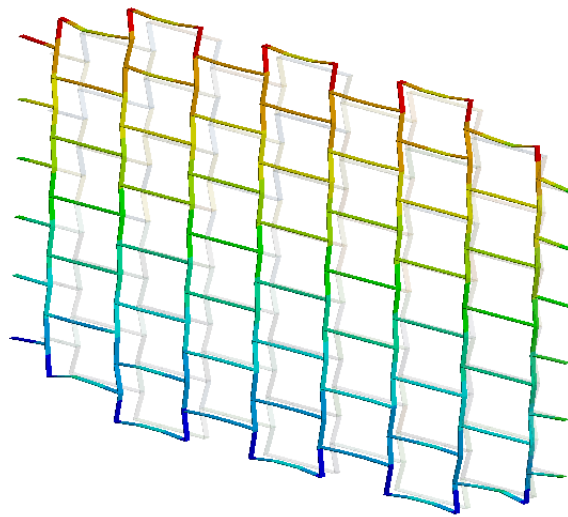
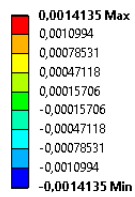


Figura 70: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -15^\circ$ .

**A: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(X Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 17/01/2019 16:46

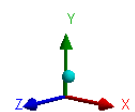
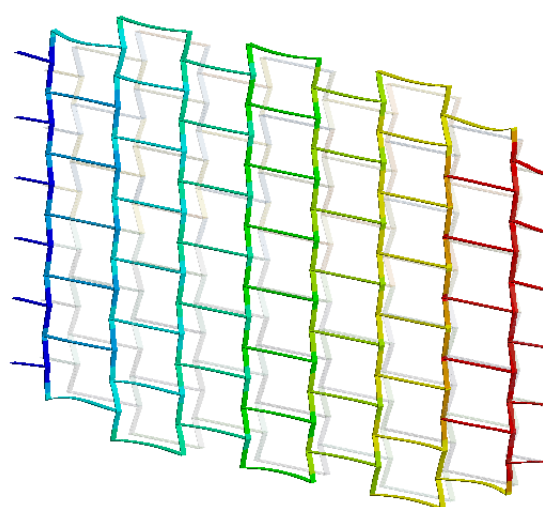
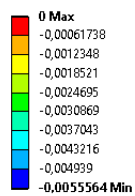


Figura 71: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -20^\circ$ .



A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
17/01/2019 16:46

0,0018375 Max  
0,0014291  
0,0010208  
0,00061248  
0,00020416  
-0,00020416  
-0,00061248  
-0,0010208  
-0,0014291  
-0,0018375 Min

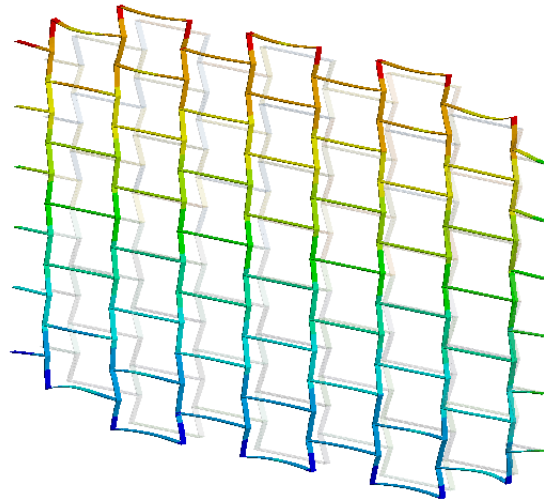


Figura 72: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -20^\circ$ .

A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(X Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
17/01/2019 16:35

0 Max  
-0,00057154  
-0,0011431  
-0,0017146  
-0,0022862  
-0,0028577  
-0,0034292  
-0,0040008  
-0,0045723  
-0,0051438 Min

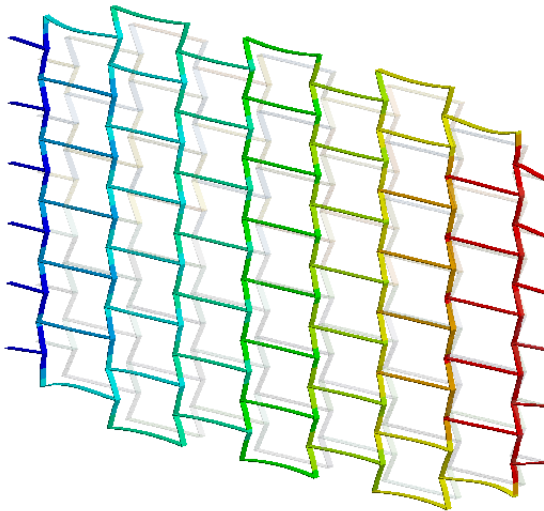


Figura 73: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -25^\circ$ .

A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
17/01/2019 16:35

0,0022124 Max  
0,0017207  
0,0012291  
0,00073746  
0,00024582  
-0,00024582  
-0,00073746  
-0,0012291  
-0,0017207  
-0,0022124 Min

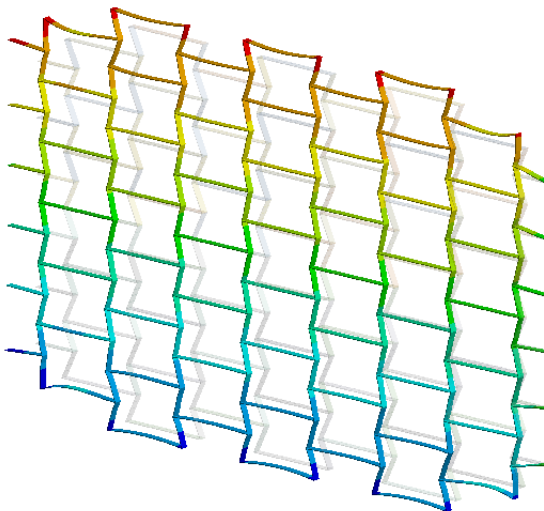


Figura 74: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -25^\circ$ .

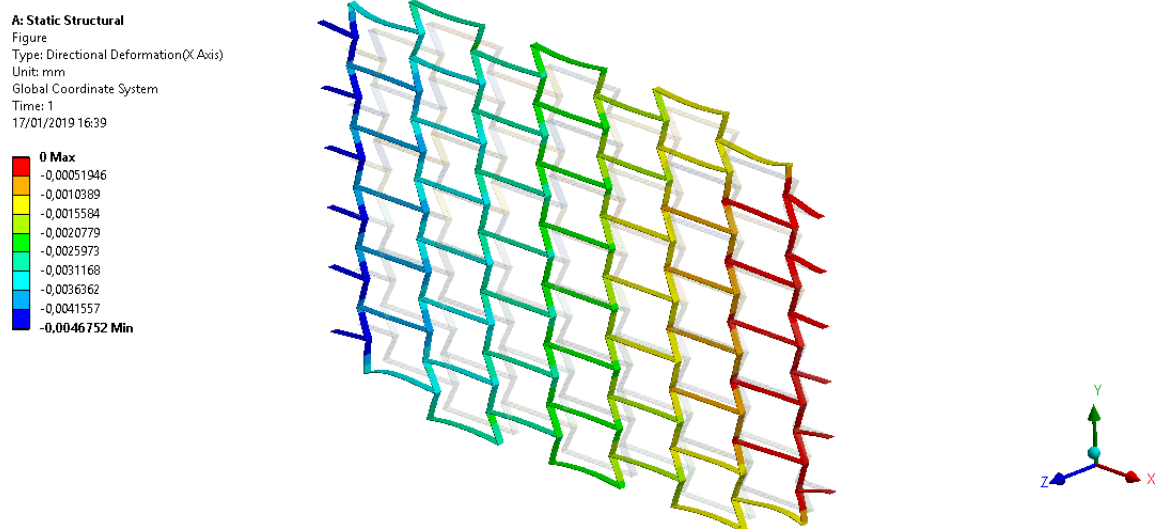


Figura 75: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -30^\circ$ .

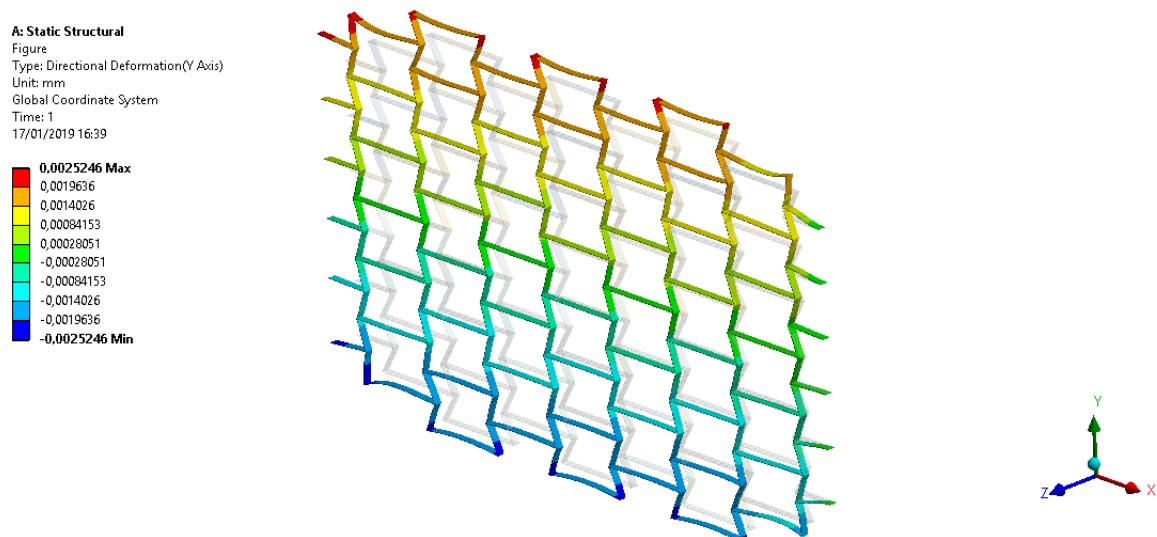


Figura 76: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 2 e  $\theta = -30^\circ$ .

# C Apêndice C - Simulação Colmeia

## 3

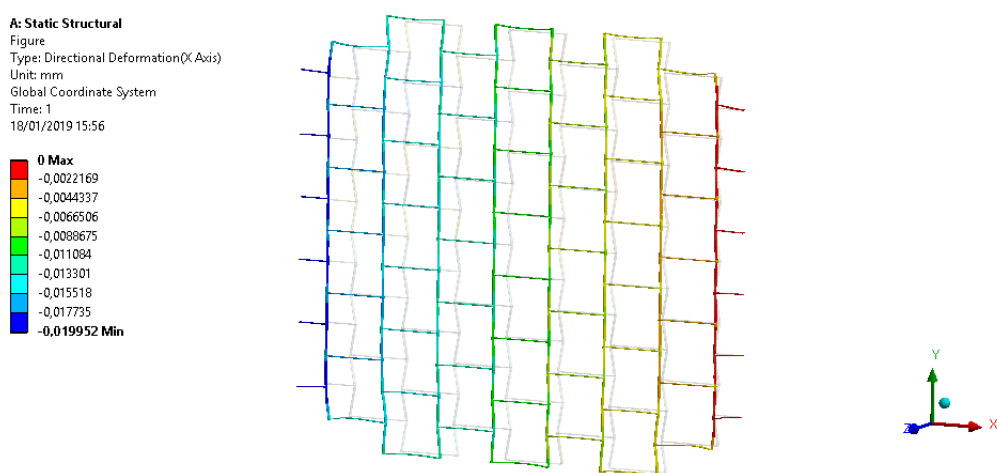


Figura 77: Campo deslocamento na direção X Colmeia 3 e  $\theta = -10^\circ$ .

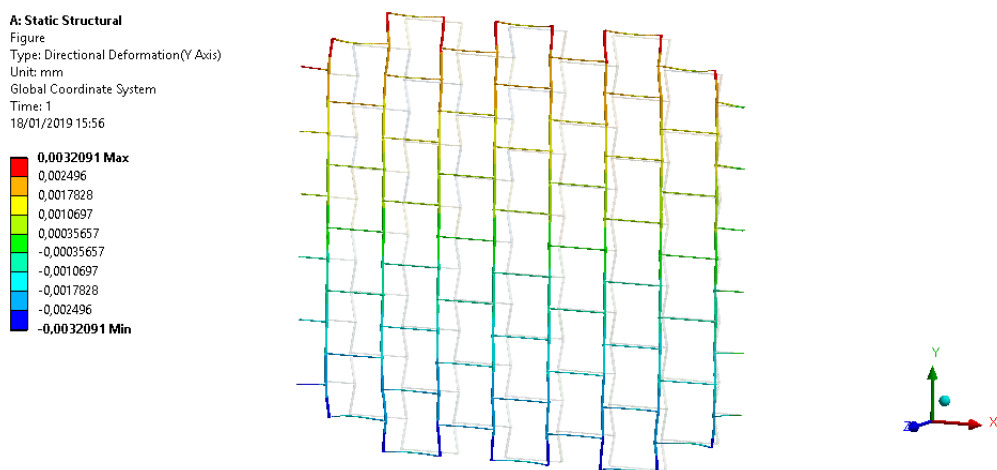


Figura 78: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -10^\circ$ .

A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(X Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
18/01/2019 16:02

1,5463e-5 Max  
-0,0020947  
-0,0042049  
-0,0063151  
-0,0084252  
-0,010535  
-0,012646  
-0,014756  
-0,016866  
-0,018976 Min

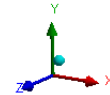
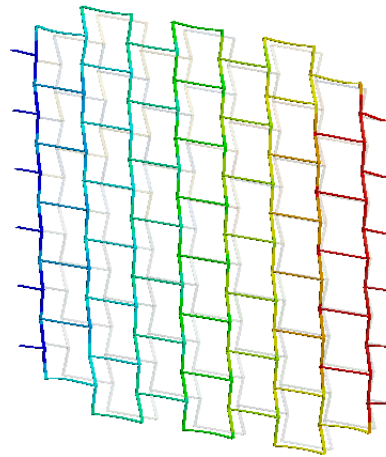


Figura 79: Campo deslocamento na direção X Colmeia 3 e  $\theta = -15^\circ$ .

A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
18/01/2019 16:02

0,0047383 Max  
0,0036854  
0,0026324  
0,0015794  
0,00052648  
-0,00052648  
-0,0015794  
-0,0026324  
-0,0036854  
-0,0047383 Min

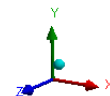
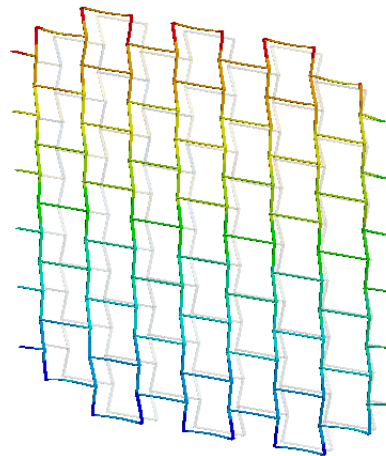


Figura 80: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -15^\circ$ .

A: Static Structural  
Figure  
Type: Directional Deformation(X Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
18/01/2019 16:11

7,016e-5 Max  
-0,0058551  
-0,01178  
-0,017706  
-0,023631  
-0,029556  
-0,035481  
-0,041407  
-0,047332  
-0,053257 Min

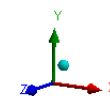
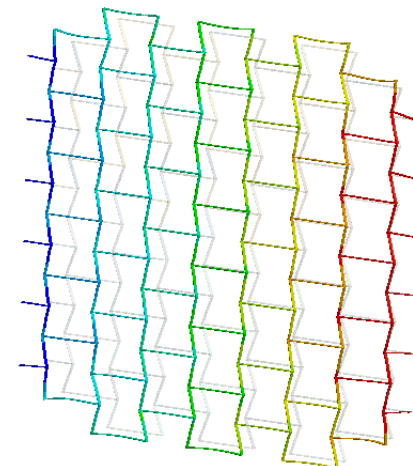


Figura 81: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -20^\circ$ .

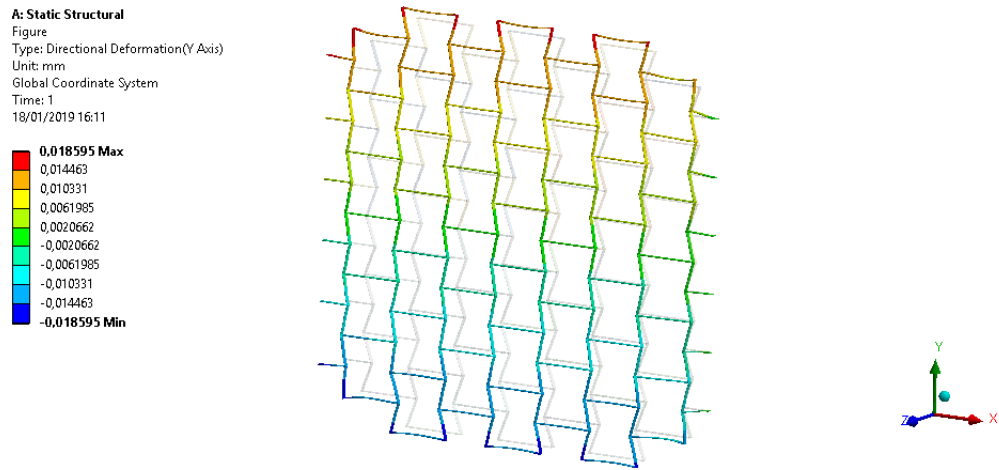


Figura 82: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -20^\circ$ .

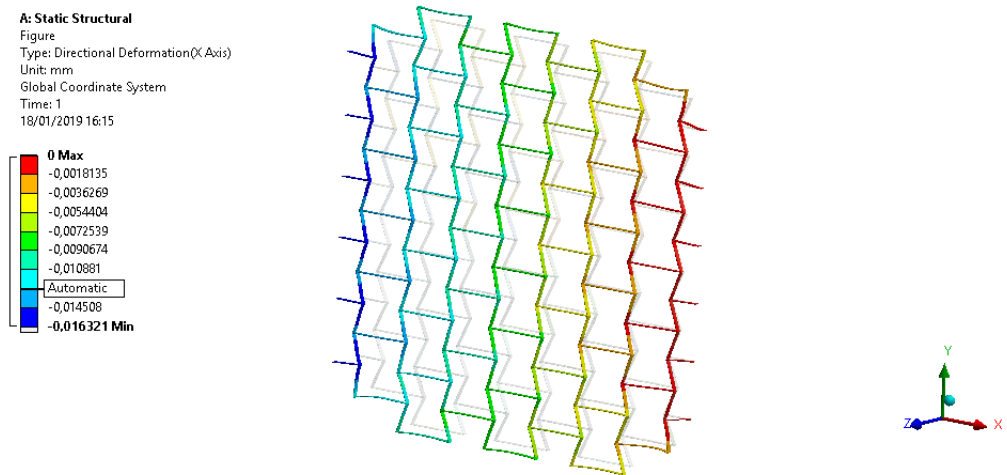


Figura 83: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -25^\circ$ .

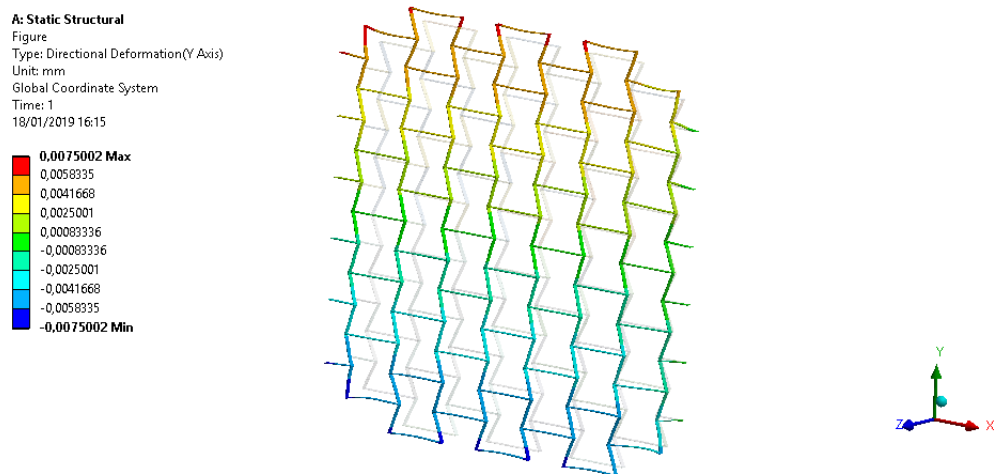


Figura 84: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -25^\circ$ .

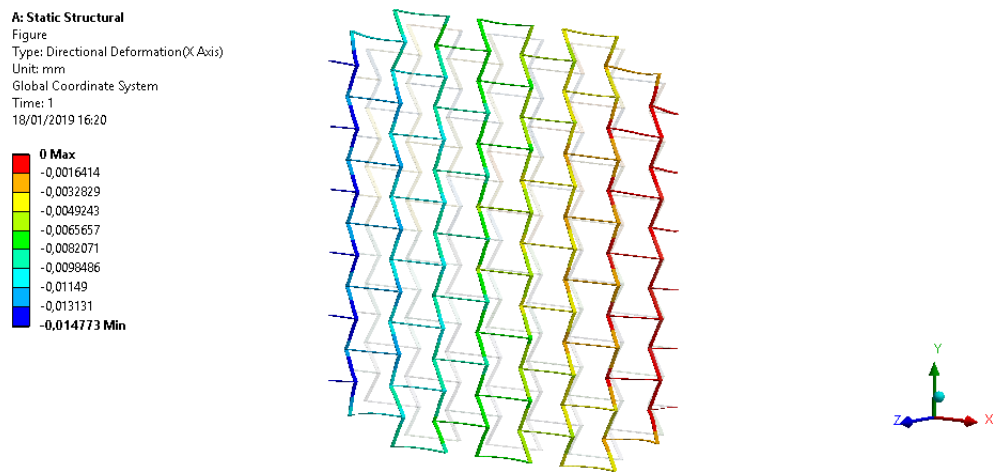


Figura 85: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -30^\circ$ .

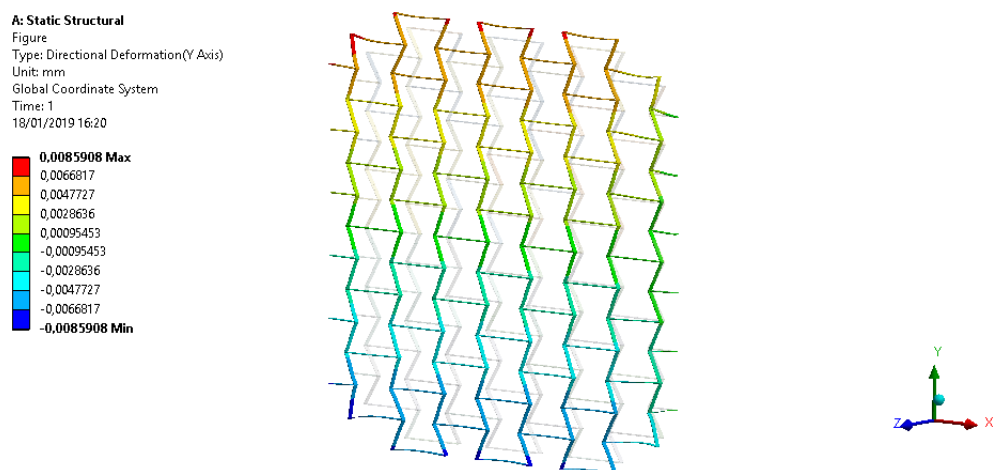


Figura 86: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 3 e  $\theta = -30^\circ$ .

# D Apêndice D - Simulação Colmeia

4

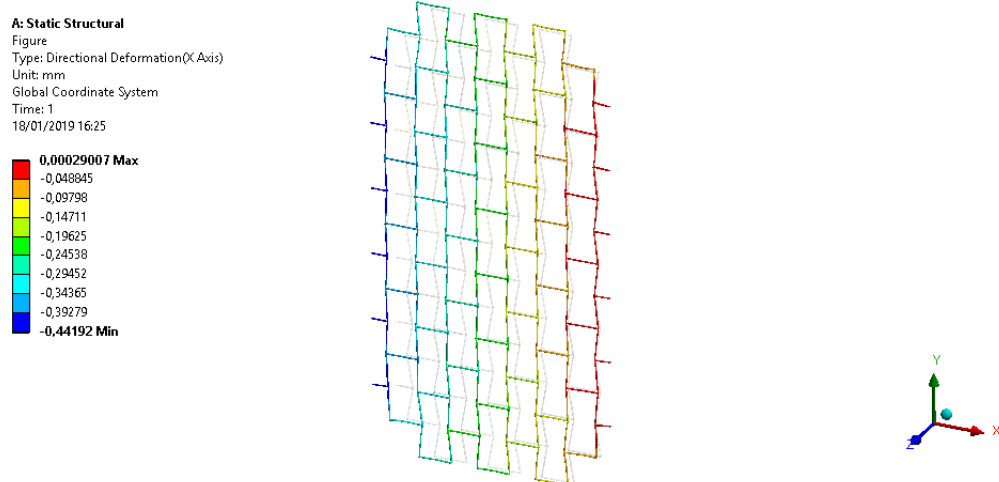


Figura 87: Campo deslocamento na direção X Colmeia 4 e  $\theta = -10^\circ$ .

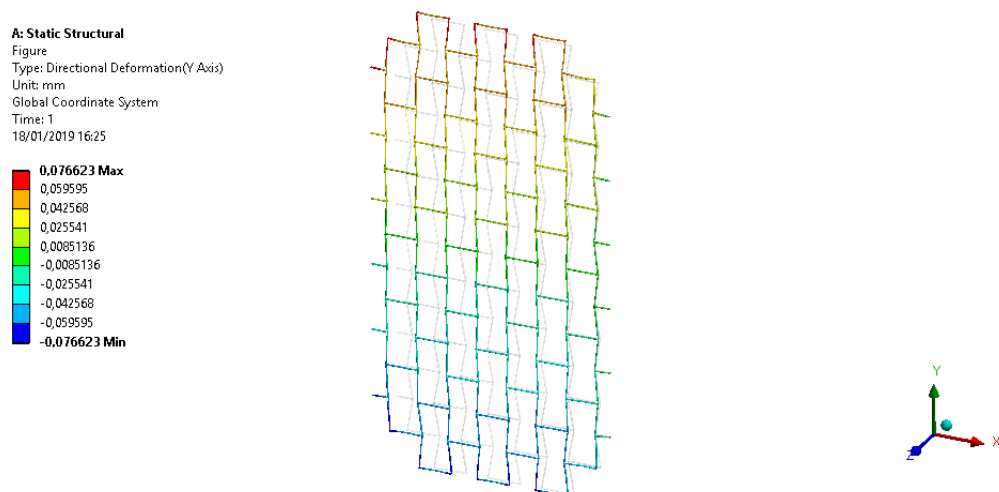


Figura 88: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -10^\circ$ .

**A: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(X Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 18/01/2019 16:40

**0 Max**  
 -0,045771  
 -0,091542  
 -0,13731  
 -0,18308  
 -0,22885  
 -0,27463  
 -0,3204  
 -0,36617  
**-0,41194 Min**

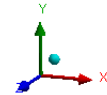
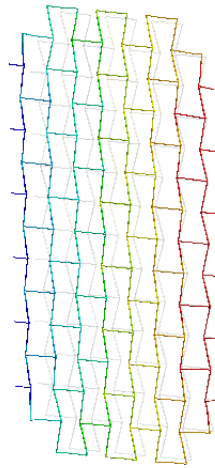


Figura 89: Campo deslocamento na direção X Colmeia 4 e  $\theta = -15^\circ$ .

**A: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(Y Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 18/01/2019 16:40

**0,11595 Max**  
 0,090185  
 0,064418  
 0,038651  
 0,012884  
 -0,012884  
 -0,038651  
 -0,064418  
 -0,090185  
**-0,11595 Min**

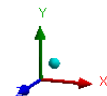
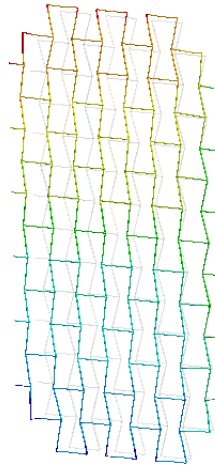


Figura 90: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -15^\circ$ .

**A: Static Structural**  
 Figure  
 Type: Directional Deformation(X Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 18/01/2019 16:43

**0 Max**  
 -0,042302  
 -0,084605  
 -0,12691  
 -0,16921  
 -0,21151  
 -0,25381  
 -0,29612  
 -0,33842  
**-0,38072 Min**

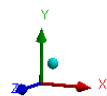
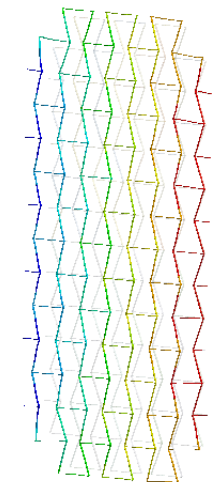


Figura 91: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -20^\circ$ .



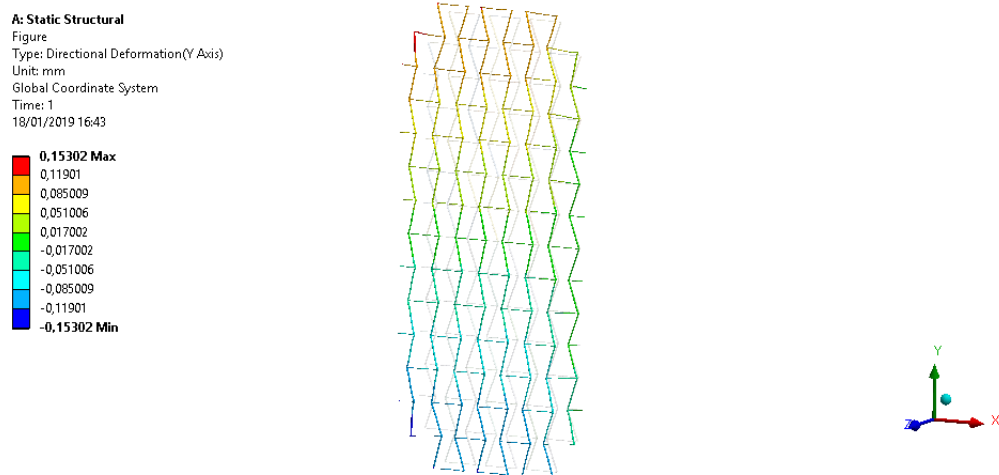


Figura 92: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -20^\circ$ .

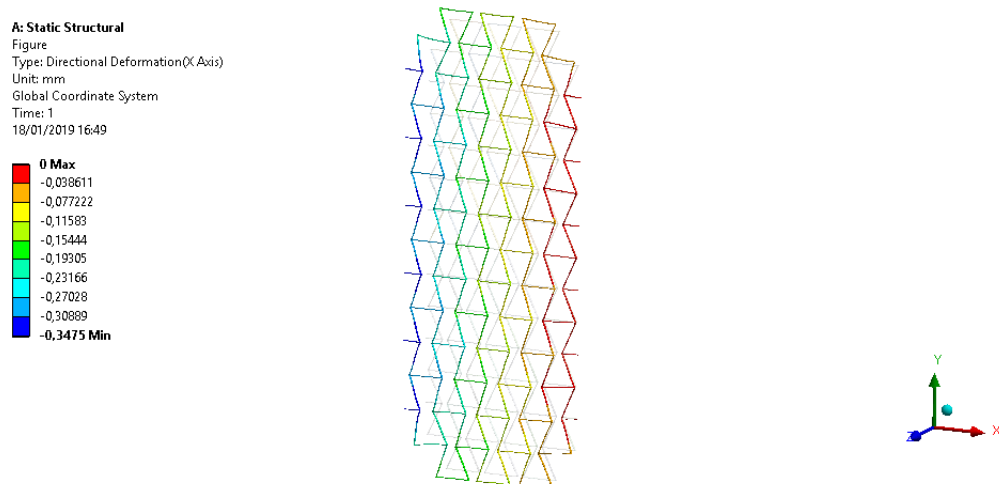


Figura 93: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -25^\circ$ .

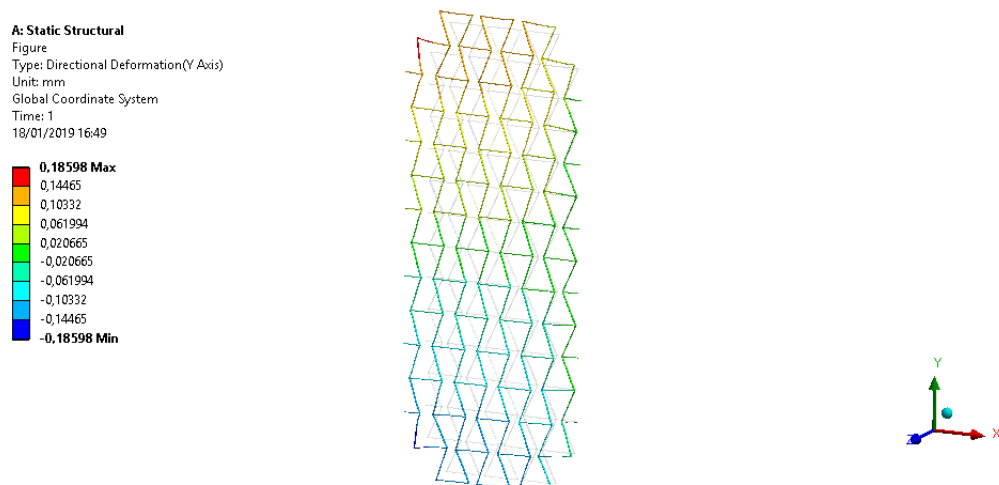


Figura 94: Campo deslocamento na direção Y Colmeia 4 e  $\theta = -25^\circ$ .